Università “Carlo Cattaneo”
Ingegneria gestionale
Analisi matematica
a.a. 2018/2019

4° PROVA PARZIALE – modalità A

1. Data la funzione $f(x,y)=\sqrt{\frac{y}{y+x}}$, calcolarne il dominio e descriverne la sua topologia (aperto, chiuso, limitato, illimitato, compatto, convesso, connesso). Rappresentare, se possibile, le sue curve di livello $k=2$ e $k=-1$. Calcolare la sua derivata direzionale nel punto $(1,1)$ lungo la direzione data dal vettore $(1,-2)$.

2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{e^{x^2+y^4}-1}$$

3. Classificare gli eventuali punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$$

4. Cercare, con il metodo ritenuto più opportuno, i candidati a essere punti di ottimo locale della funzione $f(x,y)=3x^2-y+4$ con il vincolo $x^2+y^2=4$. Motivare se tra di essi ci sono almeno due ottimi globali.

5. Risolvere il problema di Cauchy:

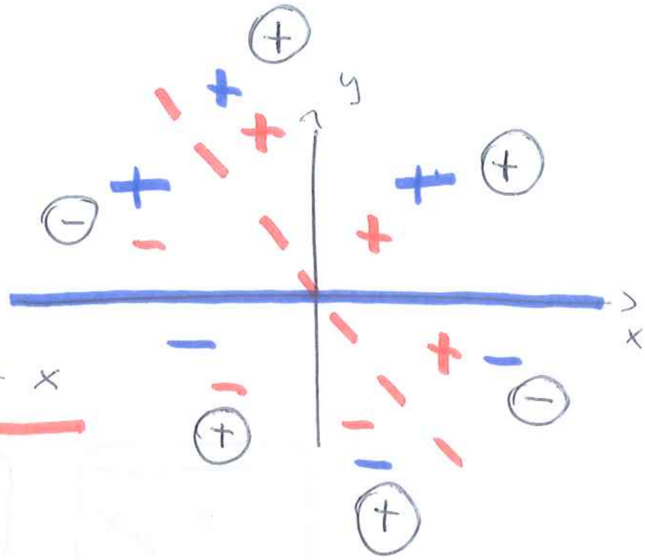
$$\begin{cases} y'=e^{t-y} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

6. Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y''-6y'+9y=3t+1$$

SOLUZIONE

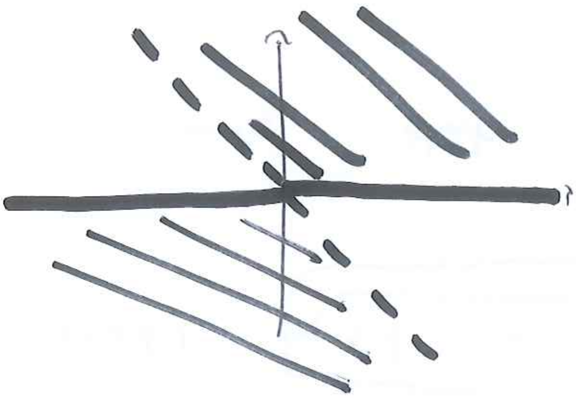
1) DOMINIO f: $\dfrac{y}{y+x} \geq 0$



$N \geq 0 \quad \underline{y \geq 0}$

$D > 0 \quad y+x>0 \rightsquigarrow \underline{y > -x}$

IL DOMINIO RISULTA



- NÈ APERTO, NÈ CHIUSO
- ILLIMITATO
- NON COMPATTO
- NON CONVESSO
- NON CONNESSO

- CURVE DI LIVELLO: $f(x,y) = k \quad , k \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{\frac{y}{y+x}} = k \implies k \geq 0$$

- la curva di livello $k=-1$ NON ESISTE
- la curva di livello $k=2$ risulta:

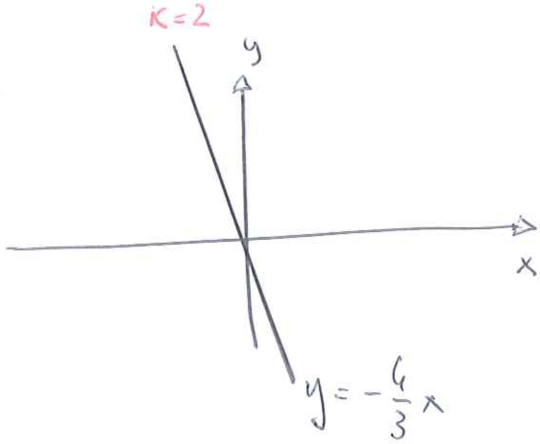
$$\sqrt{\frac{y}{y+x}} = 2$$

$$\frac{y}{y+x} = 4$$

$$y = 4(y+x)$$

$$y = 4y + 4x$$

$$-3y = 4x \implies y = -\frac{4}{3}x$$



Calcolo delle derivate parziali:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{y+x}}} \cdot \frac{0 - y \cdot 1}{(y+x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{y}{y+x}}} \cdot \frac{-y}{(y+x)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{y+x}}} \cdot \frac{1 \cdot (y+x) - y \cdot 1}{(y+x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{y}{y+x}}} \cdot \frac{x}{(y+x)^2}$$

Le derivate parziali sono CONTINUE in un INTORNO di $(1,1)$

$\implies f(x,y)$ DIFFERENZIABILE in $(1,1)$.

Possiamo calcolare le derivate direzionale come segue:

$$\nabla f(1,1) \cdot \frac{(+1,-2)}{\|(1,-2)\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{8\sqrt{5}}$$

2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{e^{x^2+y^4}-1} = \frac{0}{0}$$

- CALCOLIAMO LUNGO IL PERCORSO CHE PORTA IN $(0,0)$ DATO DA $y=0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{0}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

- CALCOLIAMO LUNGO IL PERCORSO $y=x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{e^{x^2+x^4}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2(1+x^2)} = 2$$

IL LIMITE FORNISCE DUE RISULTATI DIVERSI LUNGO DUE DIVERSI PERCORSI CHE PORTANO A $(0,0)$

$\Longrightarrow$ IL LIMITE NON ESISTE.

3) DOMINIO $f = \mathbb{R}^2$

f è un POLINOMIO $\Rightarrow$ DIFFERENZIABILE n VOLTE SU $\mathbb{R}^2$

$$f_x(x,y) = 6x^2 - 6y$$

$$f_y(x,y) = -6x + 6y$$

PUNTI STAZIONARI: $\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \longrightarrow \quad x^2 = x \,, \quad x^2 - x = 0 \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \end{array}$$

DUE PUNTI STAZIONARI $(0,0)$ e $(1,1)$

PER CLASSIFICARLI USIAMO LA MATRICE HESSIANA:

$$f_{xx}(x,y) = 12x$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -6$$

$$f_{yy}(x,y) = 6$$

$$H_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \qquad \det H = -36 < 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ è PUNTO di SELLA

$$H_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \qquad \det H = 72 - 36 = 36 > 0$$

$$f_{xx} = 12 > 0$$

$\Rightarrow (1,1)$ è PUNTO di MINIMO LOCALE

5) CONSIDERO LA FUNZIONE LAGRANGIANA

$$L(x,y,\lambda) = 3x^2 - y + 4 - \lambda\left(4 - x^2 - y^2\right)$$

CERCHIAMO I PUNTI STAZIONARI:

$$\begin{cases} L_x = 6x + 2\lambda x = 0 \longrightarrow 2x(3+\lambda) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -3 \end{cases} \\ L_y = -1 + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Se $x = 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ -1 + 2\lambda y = 0 \\ y^2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ \lambda = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Se $\lambda = -3$:

$$\begin{cases} \lambda = -3 \\ -1 - 6y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -3 \\ y = -\frac{1}{6} \\ x^2 = \frac{143}{36} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -3 \\ y = -\frac{1}{6} \\ x = \frac{\sqrt{143}}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -3 \\ y = -\frac{1}{6} \\ x = -\frac{\sqrt{143}}{6} \end{cases}$$

ABBIAMO 4 PUNTI CANDIDATI A ESSERE OTTIMI LOCALI.

POICHÈ IL VINCOLO È UN COMPATTO PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS CI SARANNO UN MASSIMO E MINIMO GLOBALI.

5) $y' = e^{t-y}$

$y' = e^t \cdot e^{-y}$

e^{-y} NON SI ANNULLA MAI $\Rightarrow$ NON CI SONO SOLUZIONI PARTICOLARI

$$\frac{y'}{e^{-y}} = e^t$$

$$\int e^y \, dy = \int e^t \, dt$$

$$e^y = e^t + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$y = \ln(e^t + c)$$

IMPONENDO IL PASSAGGIO PER $(0, 1)$ SI OTTIENE:

$$1 = \ln(1 + c)$$

$$e = 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = e - 1$$

$\Rightarrow$ la soluzione del problema di Cauchy risulta:

$$y(t) = \ln(e^t + e - 1)$$

6) RISOLVIAMO PRIMA: $y'' - 6y' + 9y = 0$

POLINOMIO ASSOCIATO $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$\Delta = 0$

$\lambda = 3$ UNICO AUTOVALORE

$\Rightarrow$ soluzione equazione omogenea associata:

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \quad , \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

CERCHIAMO UNA SOLUZIONE PARTICOLARE CON IL METODO DI SOMIGLIANZA. IL TERMINE NON OMOGENEO È $b(t) = 5t+1$ $\Rightarrow$ la soluzione particolare è del tipo $y_p(t) = at+b$; cerchiamo i valori di a e b:

$y'_p = a$; $y''_p = 0$ e sostituiamo:

$$0 - 6a + 9at + 9b = 3t + 1$$

$$9at - 6a + 9b = 3t + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9a = 3 \\ -6a + 9b = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale risulta:

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + \frac{1}{3}t + \frac{1}{3} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Università "Carlo Cattaneo"

Ingegneria gestionale

Analisi matematica

a.a. 2018/2019

4° PROVA PARZIALE – modalità B

1. Data la funzione $f(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y+x}}$, calcolarne il dominio e descriverne la sua topologia (aperto, chiuso, limitato, illimitato, compatto, convesso, connesso). Rappresentare, se possibile, le sue curve di livello $k = -2$ e $k = 1$. Calcolare la sua derivata direzionale nel punto (1,1) lungo la direzione data dal vettore (3,2).

2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{\ln(1+x^2+y^4)}$$

3. Classificare gli eventuali punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x,y) = 2y^3 - 6xy + 3x^2$$

4. Cercare, con il metodo ritenuto più opportuno, i candidati a essere punti di ottimo locale della funzione $f(x,y) = 3x^2 - y + 4$ con il vincolo $x^2 + y^2 = 4$. Motivare se tra di essi ci sono almeno due ottimi globali.

5. Risolvere il problema di Cauchy:

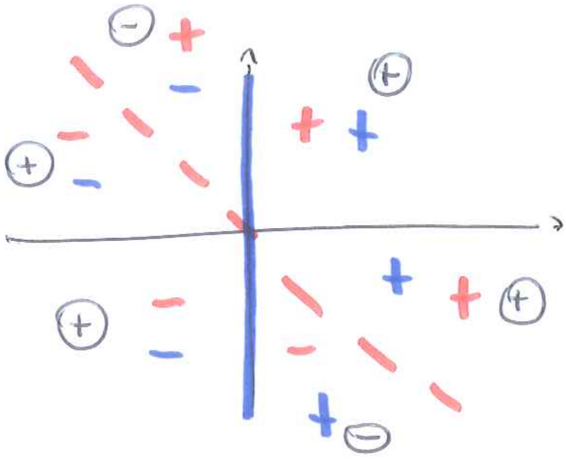
$$\begin{cases} y' = e^{-t-y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

6. Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' + 8y' + 16y = 8t - 4$$

SOLUZIONE

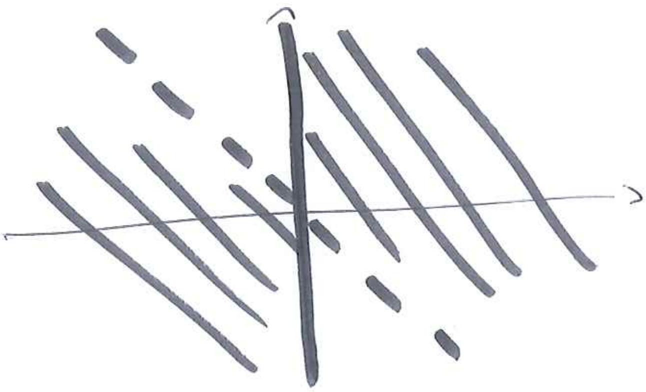
1) DOMINIO f: $\quad \dfrac{x}{y+x} \geq 0$



N $\geq$ $\quad x \geq 0$

D > 0 $\quad y + x > 0 \rightsquigarrow y > -x$

IL DOMINIO RISULTA:



- NÈ APERTO, NÈ CHIUSO
- ILLIMITATO
- NON COMPATTO
- NON CONVESSO
- NON CONNESSO

CURVE DI LIVELLO: $\quad f(x,y) = k \quad , k \in \mathbb{R}$

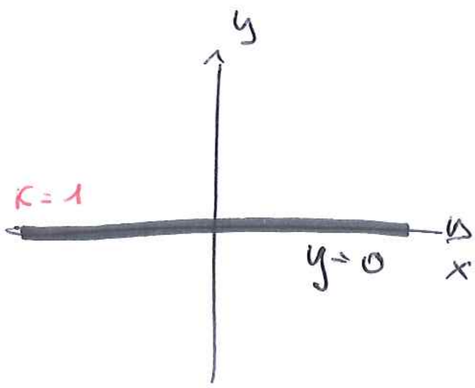
$$\sqrt{\frac{x}{y+x}} = k \quad \Rightarrow \quad k \geq 0$$

- la curva di livello $k = -2$ NON ESISTE
- la curva di livello $k = 1$ risulta:

$$\sqrt{\frac{x}{y+x}} = 1$$

$$\frac{x}{y+x} = 1$$

$$x = y + x \rightsquigarrow y = 0$$



Calcolo delle derivate parziali:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y+x}}} \cdot \frac{1\cdot(y+x) - x\cdot 1}{(y+x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y+x}}} \cdot \frac{y}{(y+x)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y+x}}} \cdot \frac{0 - x\cdot 1}{(y+x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y+x}}} \cdot \frac{-x}{(y+x)^2}$$

Le derivate parziali sono continue in un intorno di $(1,1)$ $\Rightarrow$ $f(x,y)$ DIFFERENZIABILE in $(1,1)$

Possiamo ~~da~~ calcolare la derivata direzionale come segue

$$\nabla f(1,1) \cdot \frac{(3,2)}{\|(3,2)\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{13}}$$

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{\ln(1+x^2+y^4)} = \frac{0}{0}$$

- CALCOLIAMO LUNGO IL PERCORSO CHE PASSA PER $(0,0)$ DATO DA $y=0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{0}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

- CALCOLIAMO LUNGO IL PERCORSO $y=x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{\ln(1+x^2+x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2(1+x^2)} = 3$$

IL LIMITE FORNISCE DUE RISULTATI DIVERSI LUNGO DUE DIVERSI PERCORSI CHE PORTANO A $(0,0)$ $\Rightarrow$ IL LIMITE NON ESISTE

3) DOMINIO $f = \mathbb{R}^2$

f è un POLINOMIO $\Rightarrow$ DIFFERENZIABILE ∞ VOLTE SU $\mathbb{R}^2$

$$f_x(x,y) = -6y + 6x$$

$$f_y(x,y) = 6y^2 - 6x$$

PUNTI STAZIONARI: $\begin{cases} -6y+6x=0 \\ 6y^2-6x=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y=x \\ x=y^2 \end{cases} \to y=y^2, \quad y^2-y=0 \begin{cases} y=0 \\ y=1 \end{cases}$$

DUE PUNTI STAZIONARI $(0,0)$, $(1,1)$

PER CLASSIFICARLI USIAMO LA MATRICE HESSIANA:

$$f_{xx}(x,y) = 6$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -6$$

$$f_{yy}(x,y) = 12y$$

$$H_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \quad \det H = -36 < 0$$

$\Longrightarrow (0,0)$ è PUNTO di SELLA

$$H_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} \quad \det H = 36 > 0$$

$$f_{xx} = 6 > 0$$

$\Longrightarrow (1,1)$ è PUNTO di MINIMO LOCALE

4) CONSIDERO LA FUNZIONE LAGRANGIANA

$$L(x,y,\lambda) = 3x^2 - y + 4 - \lambda(4 - x^2 - y^2)$$

CERCHIAMO I PUNTI STAZIONARI

$$\begin{cases} L_x = 6x + 2\lambda x = 0 \longrightarrow 2x(3+\lambda) = 0 \\ L_y = -1 + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

<u>Se $x = 0$:</u> $\begin{cases} x = 0 \\ -1 + 2\lambda y = 0 \\ y^2 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ \lambda = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Se $\lambda = -3$:

$$\begin{cases} \lambda = -3 \\ -1-6y=0 \\ x^2+y^2-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -3 \\ y = -\frac{1}{6} \\ x^2 = \frac{143}{36} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -3 \\ y = -\frac{1}{6} \\ x = \frac{\sqrt{143}}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 3 \\ y = -\frac{1}{6} \\ x = -\frac{\sqrt{143}}{6} \end{cases}$$

ABBIAMO 4 PUNTI CANDIDATI A ESSERE OTTIMI LOCALI. POICHÈ IL VINCOLO È UN COMPATTO PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS CI SARANNO UN MASSIMO E UN MINIMO GLOBALI.

5) $y' = e^{-t-y}$

$y' = e^{-t} \cdot e^{-y}$

e^{-y} NON SI ANNULLA MAI $\Rightarrow$ NON CI SONO SOLUZIONI PARTICOLARI

$$\frac{y'}{e^{-y}} = e^{-t}$$

$$\int e^{y}\,dy = \int e^{-t}\,dt$$

$$e^{y} = -e^{-t} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = \ln\left(-e^{-t} + c\right)$$

IMPONENDO IL PASSAGGIO PER $(0,2)$ SI OTTIENE:

$2 = \ln(-1+c) \Rightarrow c = e^2+1$

$\Rightarrow$ la soluzione del problema di Cauchy risulta:

$$y(t) = \ln\left(-e^{-t}+e^2+1\right)$$

6) RISOLVIAMO PRIMA: $y''+8y'+16y=0$

POLINOMIO ASSOCIATO $\lambda^2+8\lambda+16=0$

$\Delta=0$

$\lambda=-4$ UNICO AUTOVALORE

$\Rightarrow$ soluzione equazione omogenea associata:

$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

CERCHIAMO UNA SOLUZIONE PARTICOLARE CON IL METODO DI SOMIGLIANZA. IL TERMINE NON OMOGENEO È $b(t)=8t-4$

$\Rightarrow$ la soluzione particolare è del tipo $y_p(t)=at+b$; cerchiamo i valori di a e b:

$y_p'=a$; $y_p''=0$ e sostituiamo:

$$0+8a+16at+16b=8t-4$$

$$16at+8a+16b=8t-4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16a = 8 \\ 8a + 16b = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione differenziale risulta:

$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$$