Università "Carlo Cattaneo"

Ingegneria gestionale

Analisi matematica

a.a. 2018/2019

4° PROVA PARZIALE

1. Data la funzione $f(x,y) = \frac{\ln(y-x^2)}{x}$ calcolare e rappresentare il dominio descrivendone la sua topologia (aperto, chiuso, limitato, illimitato, compatto, convesso, connesso). Scrivere l'equazione della sua curva di livello $k = -2$. Calcolare la direzione di massima crescita nel punto (1,2).

2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{\sin(x^2y)}$$

3. Classificare gli eventuali punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x,y) = 10x - x^2 + 20y - y^2 - xy$$

4. Risolvere, con il metodo ritenuto più opportuno, il problema di ricerca degli eventuali ottimi della funzione $f(x,y) = 4x^2 - y + 4$ sotto il vincolo $x^2 + y - 2x = 3$.

5. Risolvere il problema di Cauchy:

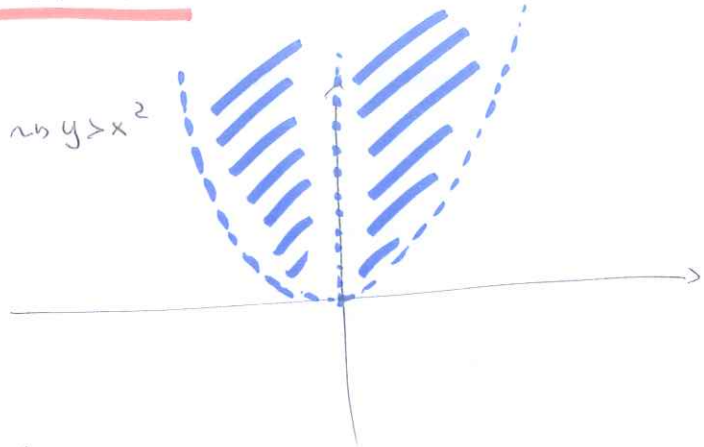
$$\begin{cases} y' = \dfrac{2ty^2}{t^2+1} \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

6. Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' + y' - 12y = 3e^{2t}$$

SOLUZIONE

1) DOMINIO: $\begin{cases} y - x^2 > 0 \iff y > x^2 \\ x \neq 0 \end{cases}$



aperto, illimitato, non connesso, non convesso

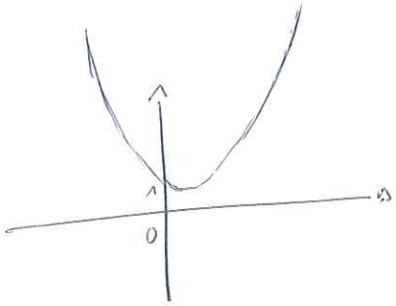
CURVA DI LIVELLO $k = -2$: $f(x,y) = -2$

$$\frac{\ln(y - x^2)}{x} = -2$$

$$\ln(y - x^2) = -2x$$

$$y - x^2 = e^{-2x}$$

$$y = x^2 + e^{-2x} \longrightarrow$$



DIREZIONE MAX CRESCITA in $(1,2)$: $\dfrac{\nabla f(2,1)}{\|\nabla f(2,1)\|}$

$$f_x(x,y) = \frac{\frac{-2x}{y-x^2} \cdot x - \ln(y-x^2) \cdot 1}{x^2} = -\frac{2}{y-x^2} - \frac{\ln(y-x^2)}{x^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\frac{1}{y-x^2} \cdot x - \ln(y-x^2) \cdot 0}{x^2} = \frac{1}{x(y-x^2)}$$

$$\Longrightarrow \nabla f(1,2) = \left(f_x(1,2),\ f_y(1,2) \right) = (-2, 1)$$

$\Rightarrow$ DIREZIONE DI MASSIMA CRESCITA È: $\dfrac{(-2,-1)}{\sqrt{4+1}} = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{\sin(x^2y)} = \frac{0}{0}$$

ma $\sin(x^2y) \sim x^2y$ per $(x,y)\to(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^2y} = 4$$

3) f è una funzione polinomiale, quindi differenziabile infinite volte

$\text{dom } f = \mathbb{R}$

$f_x(x,y) = 10 - 2x - y$

$f_y(x,y) = 20 - 2y - x$

PUNTI STAZIONARI:

$$\begin{cases} 10-2x-y=0 \\ 20-2y-x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=10-2x \\ 20-20+4x-x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=10-2x \\ 3x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=10 \end{cases}$$ UNICO PUNTO STAZIONARIO $(0,10)$

$$f_{xx}(x,y) = -2$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -1$$

$$f_{yy}(x,y) = -2$$

$$H_{(0,10)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \det H = 3 > 0 \qquad f_{xx} = -2 < 0$$

$\Rightarrow$ $(0,10)$ è PUNTO di MAX LOCALE

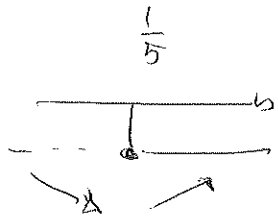
4) IL VINCOLO È ESPRIMIBILE COME FUNZIONE DI x:

$$y = 3 - x^2 + 2x$$

SOSTITUENDO IL VINCOLO SI OTTIENE:

$$f(x) = 4x^2 - (3 - x^2 + 2x) + 4 = 5x^2 - 2x + 1 \quad (\text{UNICA VARIABILE!})$$

$$f'(x) = 10x - 2 \; ; \; f'(x) \geq 0 \quad x \geq \frac{1}{5}$$



$$x = \frac{1}{5} \rightsquigarrow y = 3 - \frac{1}{25} + \frac{2}{5} = \frac{84}{25}$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{5}, \frac{84}{25}\right)$ È PUNTO di MINIMO GLOBALE VINCOLATO

5)

$$y' = \frac{2ty^2}{t^2+1}$$

separo le variabili (DIVISO PER $y^2 \Rightarrow y^2=0$ cioè $y=0$ è soluz. particolare)

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt$$

$$-\frac{1}{y} = \ln(t^2+1) + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$y = -\frac{1}{\ln(t^2+1)+c}$$

IMPONENDO IL PASSAGGIO PER $(0,-2)$:

$$-2 = -\frac{1}{\ln 1 + c} \longrightarrow 2 = \frac{1}{c} \longrightarrow c = \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$ soluz. del pb. di Cauchy:

$$y(t) = -\frac{1}{\ln(t^2+1)+\frac{1}{2}}$$

6) EQ. OMOGENEA ASSOCIATA:

$$y'' + y' - 12y = 0$$

polinomio associato $\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$

$$\Delta = 1 + 48 = 49 > 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

Soluz. parte omogenea:

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-4t} \quad , c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

SOLUZIONE PARTICOLARE È DEL TIPO (METODO SOMIGLIANZA)

$$y = a e^{2t}$$

$$y' = 2a e^{2t}$$

$$y'' = 4a e^{2t}$$

Sostituendo: $4a e^{2t} + 2a e^{2t} - 12a e^{2t} = 3e^{2t}$

$$-6a e^{2t} = 3e^{-2t}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Soluzione eq. diff.:

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-4t} - \frac{1}{2} e^{2t}$$