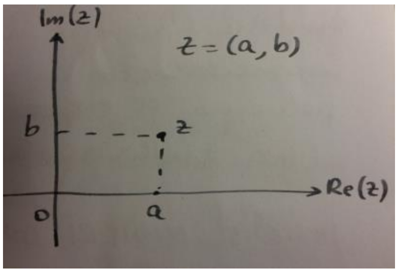
NUMERI COMPLESSI

Dato un polinomio $P(x)$ di grado n nella variabile (reale) x, non sempre esso ammette radici, e, quando le ammette, esse possono essere in numero inferiore rispetto al grado del polinomio. (Ricordiamo che si dice radice di un polinomio $P(x)$ ogni x tale che $P(x) = 0$.)
Per esempio, nel caso di polinomi di grado 2, $P(x) = x^2 -1$ ha due radici ($x = \pm 1$), ma $P(x) = x^2 + 1$ non ha alcuna radice.
Nel nuovo insieme numerico che ora introduciamo, l'insieme dei numeri complessi **C**, ogni polinomio avrà esattamente n radici.

Definizione. Si dice numero complesso z la coppia ordinata di numeri reali (a, b), ossia:

$$z = (a, b) \qquad z \in \mathbf{C}$$

dove a è la parte reale, $\mathrm{Re}(z)$, b la parte immaginaria, $\mathrm{Im}(z)$. A ogni coppia di numeri reali corrisponde un punto del piano, che sarà detto piano di Gauss.



Nel piano di Gauss, l'asse delle ascisse è detto asse reale, l'asse delle ordinate è detto asse immaginario. Ai numeri complessi della forma $(a, 0)$ corrispondono punti dell'asse reale, ossia numeri reali. Pertanto **C** si può vedere come un ampliamento di **R**, e viceversa un numero reale può essere considerato un caso particolare di numero complesso.
Ai numeri complessi della forma $(0, b)$ corrispondono punti dell'asse immaginario, ossia numeri immaginari (puri). L'unità sull'asse immaginario, $(0, 1)$, corrisponde al numero immaginario i, tale che $i^2 = - 1$.

Proprietà dell'insieme C

L'insieme numerico **C** conserva la struttura algebrica di **R** (operazioni di somma e prodotto, con le proprietà commutativa, associativa e distributiva, elementi neutri e opposto rispetto alla somma e rispetto al prodotto), ossia è ancora un campo.
Diversamente da **R**, **C** è un insieme non ordinato, ma in compenso l'elevamento a potenza/estrazione di radice (la sua inversa) sono in esso sempre definite. E' quest'ultima proprietà che garantisce l'esistenza di tutte le n radici di un polinomio di grado n.

Il numero complesso $z = (a, b)$ si può anche rappresentare in tre forme equivalenti: algebrica, trigonometrica ed esponenziale.

Somma e prodotto di numeri complessi in forma algebrica

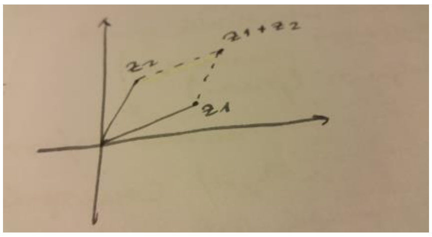
Definizione. Dato un numero complesso $z = (a, b)$, la sua forma algebrica è $z = a + bi$.

Dati due numeri complessi in forma algebrica $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, la loro somma (differenza) è data da:

$$z_1 \pm z_2 = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

ossia si sommano (sottraggono) le parti reali e quelle immaginarie.
L'elemento neutro rispetto alla somma rimane, come era in **R**, il numero reale 0, ossia $z = 0 + 0 \cdot i = (0, 0)$; l'elemento opposto di $z = a + bi$ è $- z = - a - bi$.

L'interpretazione geometrica della somma è data dalla regola del parallelogramma. La stessa interpretazione vale anche per la differenza, se si considera $z_1 - z_2 = z_1 + (- z_2)$.



Dati due numeri complessi in forma algebrica $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, il loro prodotto è:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

L'elemento neutro rispetto al prodotto rimane, come era in **R**, il numero reale 1, ossia $z = 1 + 0 \cdot i = (1, 0)$; l'elemento opposto rispetto al prodotto è dato da:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

Dati due numeri complessi in forma algebrica $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, il loro quoziente è:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac - bd) + (bc + ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac + bd}{c^2+d^2} + \frac{bc - ad}{c^2+d^2} i$$

L'interpretazione geometrica del prodotto e del quoziente sarà data in riferimento alla forma trigonometrica.

Modulo di un numero complesso

Dato il numero complesso $z = (a, b) = a + bi$, il suo modulo è:

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

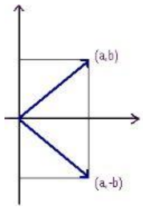
Dal punto di vista geometrico, il modulo può essere interpretato come la distanza dall'origine. Nel caso particolare in cui $z = (a, 0) = a$, ossia z è un numero reale, la definizione di modulo coincide con quella data in **R**.
Proprietà. Come in **R**, vale $|z| \geq 0$, con $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$.

Coniugato di un numero complesso

Dato il numero complesso $z = (a, b) = a + bi$, il suo coniugato è:

$$\bar{z} = (a, -b) = a - bi$$

ossia z e $\bar{z}$ hanno stessa parte reale, parte immaginaria opposta. Dal punto di vista geometrico, sono simmetrici rispetto all'asse reale.

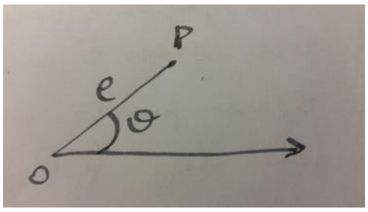


Proprietà.

$$z + \bar{z} = 2a$$
$$z - \bar{z} = 2b$$
$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$
$$|z| = |\bar{z}| \text{ (stessa distanza dall'origine).}$$

COORDINATE POLARI

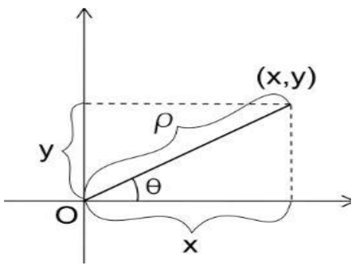
Per localizzare un punto P del piano, anziché le coordinate cartesiane $P(x, y)$ si possono utilizzare le coordinate polari. Si definisce un'origine (polo) O e un'asse polare (semiretta orientata a partire da O). Indicando con ρ il raggio OP (distanza dall'origine) e con θ l'angolo formato dal raggio OP con l'asse polare, si definiscono le coordinare polari del punto P, $P(\rho, \theta)$, dove ρ è il modulo e θ l'argomento.



Osservazione. Risulta sempre $\rho \geq 0$; per quanto riguarda θ, si considerano positivi gli angoli percorsi in senso antiorario, negativi quelli percorsi in senso orario. Le coordinate polari di un punto non sono univoche, in particolare non è unico θ: lo stesso punto può essere individuato da tutti gli angoli θ_k che differiscono per un multiplo intero di 2π, ossia: $\theta_k = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Per rendere unico l'argomento θ si può utilizzare l'argomento principale $\theta \in (0, 2\pi]$ oppure $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Relazione fra coordinate polari e coordinate cartesiane

Facciamo coincidere l'asse polare con il semiasse positivo delle x.



In tal caso valgono le seguenti relazioni fra coordinate polari e coordinate cartesiane:

da (ρ, θ) a (x, y) $\qquad$ $x = \rho \cos\theta$ $\qquad$ $y = \rho \sin\theta$

da (x, y) a (ρ, θ) $\qquad$ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad$ $\theta : \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \wedge \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Forma trigonometrica di un numero complesso

Tornando ai numeri complessi, il numero z può essere identificato con le coordinate polari anziché quelle cartesiane:

$$z = (a, b) = (\rho, \theta)$$

dove $\rho = |z|$, $\theta : \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \wedge \sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$.

Utilizzando le coordinate polari, si può definire la forma trigonometrica del numero complesso.
Dato:

$$z = a + bi$$

sostituendo $a = \rho\cos\theta$, $b = \rho\sin\theta$ si ottiene:

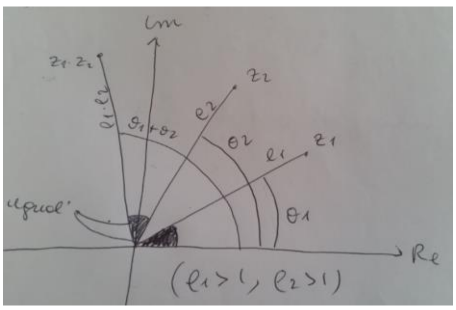
$$\begin{aligned} z &= \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta \\ &= \rho(\cos\theta + i\sin\theta). \end{aligned}$$

Prodotto e quoziente dei numeri complessi in forma trigonometrica (formule di De Moivre)

Dati due numeri complessi in forma trigonometrica $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, il loro prodotto è:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned}$$

ossia i moduli si moltiplicano, gli argomenti si sommano.
Il significato geometrico è immediato: se si moltiplica z_1 per un altro numero complesso z_2, il modulo di z_1 subisce una <u>dilatazione</u> pari a ρ_2 (contrazione, se $\rho_2 < 1$), l'argomento subisce una rotazione pari a θ_2.



Se in particolare moltiplicando z_1 per un altro numero complesso z_2 di modulo 1, z_1 subisce solo una rotazione pari a θ_2 mentre il modulo resta invariato; moltiplicando z_1 per 1, il modulo resta invariato e la rotazione è 0 (conferma che il numero 1 è l'elemento neutro rispetto al proodotto), mentre moltiplicando per -1 la rotazione è π, ossia si ottiene il numero opposto - z_1.

Dati due numeri complessi in forma trigonometrica $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$, $z_2 \neq 0$, il loro quoziente è:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$$

ossia i moduli si dividono, gli argomenti si sottraggono. In corrispondenza, il significato geometrico è analogo a quello del prodotto.

Potenza e radici di un numero complesso in forma trigonometrica

Tornando al prodotto, utilizzando la regola precendente si può dimostrare che vale, per la potenza n-esima di un numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$:

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$$

Esempio. Dato $z = -3i = 3(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi)$, vale:

$$z^3 = 27(\cos\frac{9}{2}\pi + i\sin\frac{9}{2}\pi) = 27(\cos\frac{1}{2}\pi + i\sin\frac{1}{2}\pi)$$

considerando nell'ultimo passaggio l'argomento principale.

In **C** vale la stessa definizione di radice n-esima data in **R**: dato z, il numero v si dice <u>radice n-esima (complessa)</u> di z se risulta:

$$v^n = z\,.$$

Teorema. Ogni $z \in C$ ($z \neq 0$):

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ha n radici n-esime complesse (n naturale non nullo):

$$(\sqrt[n]{z})_k \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

date da:

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{\rho}\,(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}).$$

Nel caso particolare $n = 2$ (radici quadrate) si ottiene:

$$(\sqrt{z})_k = \sqrt{\rho}\,[\cos(\frac{\theta}{2} + k\pi) + i\sin(\frac{\theta}{2} + k\pi)] \qquad k = 0, 1$$

da cui le due radici:

$$(\sqrt{z})_0 = \sqrt{\rho}\ [\cos\frac{\theta}{2} + i\sin(\frac{\theta}{2})],\quad (\sqrt{z})_1 = \sqrt{\rho}\ [\cos(\frac{\theta}{2}+\pi) + i\sin(\frac{\theta}{2}+\pi)] = -(\sqrt{z})_0$$

che risultano opposte.

Esempio. Dato $z = 8i = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$, le radici cubiche sono date da:

$$(\sqrt[3]{z})_k = \sqrt[3]{8}\ (\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}) = = 2[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi\right)] \quad k = 0, 1, 2.$$

da cui le tre radici:

$$(\sqrt{z})_0 = 2\ (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}),\quad (\sqrt{z})_1 = 2\ (\cos\pi + i\sin\pi)\ ,\ (\sqrt{z})_2 = 2\ (\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi).$$

Interpretazione geometrica delle radici *n*-esime di un numero complesso. Le n radici n-esime di

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

sono gli n vertici di un poligono regolare inscritto in una circonferenza di centro O e raggio $\sqrt[n]{\rho}$, con il primo vertice nel punto di argomento $\frac{\theta}{n}$, mentre i successivi si ottengono sommando ogni volta $\frac{2\pi}{n}$ al precedente argomento.