Exercise 1 *Dato il sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ k & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}; \mathbf{b} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lo si discuta al variare del parametro reale k*.*

SOLUZIONE: Per il teorema di Rouché-Capelli abbiamo che il sitema ha soluzione se e solo se

$$rango\,(A) = rango\,(A|b)$$

Notando che $rango\,(A) = 3$ per $k \neq 1$, segue che per $k \neq 1$ il sistema è indeterminato e ha ∞^1 soluzioni. Per $k = 1$, $rango\,(A) = 2 \neq 3 = rango\,(A|b)$, segue che il sistema è impossibile.

Exercise 2 *Dato il sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ k & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix}; \mathbf{b} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lo si discuta al variare del parametro reale k*.*

SOLUZIONE: Per il teorema di Rouché-Capelli Il sitema ha soluzione se e solo se

$$rango\,(A) = rango\,(A|b)$$

Noto che $rango\,(A) = 3$ per $k \neq 1$, segue che per $k \neq 1$ il sistema è indeterminato e ha ∞^1 soluzioni. Per $k = 1$, $rango\,(A) = 2 = rango\,(A|b)$, segue che per $k = 1$ il sistema è indeterminato e ha ∞^2 soluzioni.

Exercise 3 *Dato il sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*, con*

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}; \mathbf{b} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lo si discuta al variare del parametro k*.*

SOLUZIONE: Per il teorema di Rouché-Capelli Il sitema ha soluzione se e solo se

$$rango\,(A) = rango\,(A|b)$$

Notiamo che, $rango\,(A) = 3$ per $k \neq 0$ e $k \neq -1$ e $rango\,(A) = 2$ per $k = 0$ e $k = -1$. Notiamo inoltre che $rango\,(A|b) = 3$ per $k \neq -1$ e $rango\,(A|b) = 2$ per $k = -1$. Seguche che il sistema è di Cramer per per $k \neq 0$ e $k \neq -1$, ossia è determinato. E' impossibile per $k = 0$. E' indeterminato per $k = -1$ con ∞^1 soluzioni.

Exercise 4 *Dato il sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{b} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lo si discuta al variare del parametro reale k *e lo si risolva per* $k = 2$ *e per* $k = -2$*.*

SOLUZIONE: Noto che $rango\,(A) = 3$ per $k \neq \pm 1$ e $rango\,(A) = 2$ per $k = \pm 1$. Inoltre $rango\,(A|b) = 3$ sempre. Segue che il sistema è impossibile per $k = \pm 1$ ed è determinato per $k \neq \pm 1$. Dato $k = 2$ e per $k = -2$, per risolvere utilizzo la regola di Cramer:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Exercise 5 *Dato il sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$*, con*

$$A = \begin{bmatrix} k+1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & k \end{bmatrix}; \mathbf{b} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lo si discuta al variare del parametro reale k *e lo si risolva per* $k = 1$ *e per* $k = 0$*.*

SOLUZIONE: Noto che $rango\,(A) = 3\ \forall k$. Quindi il sistema è sempre indeterminato con ∞^1 soluzioni. Per $k = 1$ l'insieme soluzione è

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 1-t \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$$

Per $k = 0$ l'insieme soluzione è

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \\ t \end{bmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercise 6 *Fornire la rappresentazione matriciale delle seguenti trasformazioni lineari (considerando sempre come base quella canonica):*

1. *La trasformazione che associa ad ogni vettore di* $\mathbb{R}^4$ *il suo doppio cambiato di segno.*
2. *La trasformazione che associa ad ogni vettore di* $\mathbb{R}^3$ *il vettore ottenuto scambiando la prima entrata con la terza.*
3. *La transformazione che associa ad ogni vettore di* $\mathbb{R}^4$ *il vettore di* $\mathbb{R}^2$ *ottenuto eliminando la prima e la terza componente del vettore di* $\mathbb{R}^4$*.*

SOLUZIONE: Caso 1), considero la base canonica di $\mathbb{R}^4$ data da $\mathcal{C} = \{e^1, e^2, e^3, e^4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

e notando che

$$f\left(e^1\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ f\left(e^2\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ f\left(e^3\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix};\ f\left(e^4\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Per il teorema di rappresentazione abbiamo che la matrice associata alla trasformazione lineare è:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Exercise 7 *Sia* $F : \mathbb{R}^2 -> \mathbb{R}^2$ *lineare. Se*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

è la trasformazione lineare associata a F*, si dica se* F *è suriettiva, iniettiva, biunivoca e si calcoli* $\dim\left(\mathrm{Im}\left(F\right)\right)$ *e* $\dim\left(Ker\left(F\right)\right)$*.*

SOLUZIONE. Dato che $rango\,(A) = 2$, abbiamo che $\dim(\mathrm{Im}\,(F)) = 2$ e $\dim(Ker\,(F)) = 0$, ossia F è suriettiva, iniettiva, biunivoca.

Exercise 8 *Sia $F : \mathbb{R}^4 -> \mathbb{R}^3$ lineare. Se*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 2k \\ 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}$$

è la trasformazione lineare associata a F, si calcoli $\dim(\mathrm{Im}\,(F))$ e $\dim(Ker\,(F))$, al variare di k.

SOLUZIONE. Dato che $rango\,(A) = 3$ per $k \neq 0$ e $rango\,(A) = 1$ per $k = 0$, abbiamo che $\dim(\mathrm{Im}\,(F)) = 3$ e $\dim(Ker\,(F)) = 1$ per $k \neq 0$ e $\dim(\mathrm{Im}\,(F)) = 1$ e $\dim(Ker\,(F)) = 3$ per $k = 0$.

ESERCIZI ALGEBRA LINEARE (IN PREPARAZIONE DEL PARZIALE, PARTE II)

Exercise 9 *Sia $F : \mathbb{R}^4 -> \mathbb{R}^3$ lineare. Se*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & k^2-1 & 0 \end{bmatrix}$$

è la trasformazione lineare associata a F, si calcoli $\dim(\mathrm{Im}\,(F))$ e $\dim(Ker\,(F))$, al variare di k.

SOLUZIONE: Per $k \neq \pm 1$ $\dim(\mathrm{Im}\,(F)) = rango\,(A) = 3$ (F è suriettiva) e $\dim(\mathrm{Im}\,(F)) = 1$. Per $k = \pm 1$ $\dim(\mathrm{Im}\,(F)) = rango\,(A) = 2$ (F non è suriettiva) e $\dim(\mathrm{Im}\,(F)) = 2$.

Exercise 10 *Data la matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

calcolare autovalori, indicarne molteplicità algebrica e geometrica e calcolare gli autospazzi associati.

SOLUZIONE: Autovalori 1 e 8. Abbiamo che $ma\,(1) = 2$ e $mg\,(1) = 2$, con autovettori associati

$$v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ allora } V_{(8)} = \left\{ t_1 v_1^{(1)} + t_2 v_2^{(1)} | t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

. Inoltre, $ma\,(8) = mg\,(8) = 1$, un autovettore associato è dato da

$$v^{(8)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ allora } V_{(8)} = \left\{ t v^{(8)} | t \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercise 11 *Data la matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

calcolare autovalori, indicarne molteplicità algebrica e geometrica e calcolare gli autospazzi associati.

SOLUZIONE: Gli autovalori sono $\pm i$, -1. Con $ma\,(-i) = mg\,(-i) = 1$, e autovettore associato dato da:

$$v^{(i)} = \begin{bmatrix} -1+i \\ 0+i \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ allora } V_{(i)} = \left\{ t v^{(i)} | t \in \mathbb{R} \right\}$$

$ma\,(-i) = mg\,(-i) = 1$.