ESERCIZI SULL'ALGEBRA LINEARE (IN PREPARAZIONE DEL PARZIALE)

Exercise 1 *Assegnati i vettori*

$$\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}; \mathbf{v}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ k-2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) *si determini il massimo numero di vettori linearmente indipendenti al variare del parametro reale k; (Soluzione: due per $k = \frac{2}{3}$, tre per $k \neq \frac{2}{3}$)*

b) *si dica per quali valori del parametro reale k, l'insime dei tre vettori forma una base di $\mathbb{R}^3$. (Per $k \neq \frac{2}{3}$)*

Exercise 2 *Si considerino le matrici:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix};\ A^2;\ AB;\ AB^2;\ A^{-2}B;\ B^4A^2$$

e se ne calcolino i rispettivi determinanti. (Soluzione: $|A| = 5$, $|B| = 1$, $\left|A^2\right| = 25$, $|AB| = 5$, $\left|AB^2\right| = 5$, $\left|A^{-2}B\right| = \frac{1}{25}$, $\left|B^4A^2\right| = 25$)

Exercise 3 *Calcolare il rango delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(Soluzione: rango $(A) = 4$, rango $(B) = 2$, rango $(C) = 3$, rango $(D) = 1$).

Exercise 4 *Si determini, al variare del parametro reale k, il rango delle seguenti matrici:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & k & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} k-6 & 2 \\ 0 & k \\ 3 & -1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & k & 6 \\ 0 & -2 & k-3 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} k & 3-k \end{bmatrix}$$

(Soluzione: rango $(A) = 3$ $\forall k$, rango $(B) = 1$ per $k = 0$ e rango $(B) = 2$ per $k \neq 0$, rango $(C) = 3$ $\forall k$, rango $(D) = 1$, $\forall k$)

Exercise 5 *Assegnato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

lo si discuta, determinandone le soluzioni quando è possbile, rispettivamente per $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e per $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exercise 6 *Assegnato il sistema*

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x - y + z = -1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

si dica se ammette soluzioni e quante.

Exercise 7 *Assegnati i vettori:*

$$\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{v}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v}^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

si determini almeno un vettore $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4$, *non nullo, che sia ortogonale ai tre vettori assegnati.*

Exercise 8 *Assegnato il sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *con*

$$A = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

a) *lo si discuta la variare del parametro reale* k;

b) *lo si risolva per* $k = 2$;

c) *si discuta, inoltre, al variare del parametro reale* k, *il sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *e lo si risolva.*

Exercise 9 *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la trasformazione lineare rappresentata dalla matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

si determinino: le dimensioni di $\operatorname{Im}(f)$ *e di* $\ker(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ *e* $\ker(f)$. *(Soluzione:* $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 2$ $\dim(\ker(f)) = 1$*)*

Exercise 10 *Sia* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *la trasformazione lineare rappresentata dalla matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

si determinino: le dimensioni di $\operatorname{Im}(f)$ *e di* $\ker(f)$, $\operatorname{Im}(f)$ *e* $\ker(f)$.

Exercise 11 *Sia* f *una funzione lineare da* $\mathbb{R}^3$ *a* $\mathbb{R}^5$. *Se*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

è la matrice associata a f, *si dica, giustificando la risposta, se la funzione lineare* $y = f(x)$ *è una funzione suriettiva, iniettiva, biunivoca.*

Exercise 12 *Sia* f *una funzione lineare da* $\mathbb{R}^3$ *a* $\mathbb{R}^2$. *Se*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è la matrice associata a f, *si dica, giustificando la risposta, se la funzione lineare* $y = f(x)$ *è una funzione suriettiva, iniettiva, biunivoca.*

Exercise 13 *Sia* f *una funzione lineare da* $\mathbb{R}^3$ *a* $\mathbb{R}^3$. *Se*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

è la matrice associata a f, *si dica, giustificando la risposta, se la funzione lineare* $y = f(x)$ *è una funzione suriettiva, iniettiva, biunivoca.*

Exercise 14 *Sia f una funzione lineare da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$. Se*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \alpha & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

è la matrice associata a f, si dica, giustificando la risposta, se e per quali valori di α la funzione lineare $y = f(x)$ è una funzione suriettiva, iniettiva, biunivoca.

Exercise 15 *Assegnate le matrici:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

se ne determinino gli autovalori e gli autovettori.