SISTEMI LINEARI

Consideriamo il seguente sistema di m equazioni lineare nelle n incognite x_1, x_2,..., x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m1}x_2 + & \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

tale sistema può essere scritto in forma matriciale come segue:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dove

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se $m = n$, ossia il numero di equazioni è uguale al numero delle incognite e la matrice A è quadrata, il sistema lineare si dice quadrato. Iniziamo lo studio dei sistemi lineari partendo proprio dai sistemi quadrati.

SISTEMI LINEARI QUADRATI

Per risolvere il sistema lineare quadrato $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ operiamo in modo analogo a come si procede con le equazioni lineari del tipo $ax = b$, dove, se $a \neq 0$, la soluzione è data da $x = (a)^{-1} b = \frac{b}{a}$. Infatti, se $\det(A) = |A| \neq 0$, esiste la matrice inversa di A, che indichiamo con A^{-1}. Segue che la soluzione del sistema è

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Sviluppando il prodotto matrice per vettore $A^{-1}\mathbf{b}$, ci accorgiamo che

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} |B_1| \\ |B_2| \\ \vdots \\ |B_n| \end{bmatrix}$$

dove B_i, con $i = 1, ..., n$, è la matrice ottenuta sostituendo alla i-esima colonna di A il vettore dei termini noti $\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} B_1 \ &: = \left[\mathbf{b}, \mathbf{a}^2, ..., \mathbf{a}^n\right] \\ B_2 \ &: = \left[\mathbf{a}^1, \mathbf{b}, ..., \mathbf{a}^n\right] \\ &\vdots \\ B_n \ &: = \left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, ..., \mathbf{b}\right] \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato il seguente teorema:

Theorem 1 (di Cramer) *Dato il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con A matrice $n \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vettore dei termini noti (assegnato) e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vettore delle incognite. Se $\det(A) \neq 0$ il sistema ha una e una sola soluzione (e si dice determinato) data da:*

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \text{ -> } (\mathbf{x})_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}$$

dove B_i è la matrice ottenuta sostituendo la i-esima colonna di A con il vettore dei termini noti.

Questi sistemi per cui sappiamo calcolare la soluzione tramire la Regola di Cramer, meritano una denominazione particolare:

Definition 2 (Sistema di Cramer) *Dato il sistema quadrato* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *esso si dice di Cramer se* $\det(A) \neq 0$*.*

Example 3 *Consideriamo il seguente sistema*

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -x_n & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +4x_n & = & 0 \\ 5x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 2 \end{cases}$$

scrivo il sistema in forma matriciale

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}}$$

Nel risolverlo, prima controllare che sia un sistema di Cramer, appurato ciò calcolo la soluzione con la regola di Cramer:

- *[Step 1]* $\det(A) = 27 \neq 0$*, il sistema è di Cramer;*
- *[Step 2] Trovo la soluzione con la regola di Cramer. Consideriamo* $A = \left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\right]$*, dove*

$$\mathbf{a}^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix};\ \mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{a}^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Il metodo di Cramer ci richiede di calcolare:

$$\begin{aligned} \det\left(\left[\mathbf{b}, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\right]\right) &= \left|\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right| = 11 \\ \det\left(\left[\mathbf{a}^1, \mathbf{b}, \mathbf{a}^3\right]\right) &= \left|\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right| = -5 \\ \det\left(\left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{b}\right]\right) &= \left|\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right| = -4 \end{aligned}$$

la soluzione è dunque

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det\left(\left[\mathbf{b}, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3\right]\right)}{\det(A)} = \frac{11}{27} \\ x_2 &= \frac{\det\left(\left[\mathbf{a}^1, \mathbf{b}, \mathbf{a}^3\right]\right)}{\det(A)} = \frac{-5}{27} \\ x_3 &= \frac{\det\left(\left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{b}\right]\right)}{\det(A)} = \frac{-4}{27} \end{aligned}$$

ossia

$$\mathbf{x} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Exercise 4 *Risolvere i seguenti sistemi lineari quadrati utilizzando la regola di Cramer:*

$$\begin{cases} -x_1 & +7x_2 & = & 1 \\ -x_1 & -x_2 & = & -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & -2x_3 & = & 4 \\ -x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 10 \\ -3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & -2x_3 & -x_4 & = & 1 \\ -x_1 & +x_2 & +4x_3 & -x_4 & = & -3 \\ -3x_1 & +x_2 & -3x_3 & -x_4 & = & -2 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 1 \end{cases}$$

Siamo in grado di risolvere i sistemi di Cramer. Passiamo ora a trattare la classe dei sistemi omogenei, ossia i sistemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *con* $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ *vettore nullo, che non necessariamente fanno parte del club ristretto dei sistemi di Cramer.*

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

Risolvere un sistema omogeneo (non necessariamente quadrato) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ equivale a trovare i valori x_1, x_2, ..., x_n per cui

$$\mathbf{a}^1 x_1 + \mathbf{a}^2 x_2 + ... + \mathbf{a}^n x_n = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m \tag{1}$$

Sappiamo che se i vettori colonna di A, vale a dire $\mathbf{a}^1$, $\mathbf{a}^2$,..., $\mathbf{a}^n$, sono linearmente indipendenti, allora l'unico modo per avere soddisfatta l'equazione (1) è fissare

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$$

che equivale a dire che l'unica soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è $\mathbf{x} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Al contrario, se i vettori colonna di A sono linearmente dipendenti, allora (per definizione di dipendenza linare) esiste x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, non tutti nulli,

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

che soddisfano (1). Ciò significa che il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ammette almeno una soluzione non banale $\mathbf{x}^*$. Ma se $\mathbf{x}^*$ è tale per cui $A\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, allora $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, abbiamo che:

$$A(\lambda \mathbf{x}^*) = \lambda \left(\underbrace{A\mathbf{x}^*}_{=\mathbf{0}} \right) = \mathbf{0}$$

ovvero, tutti i vettori $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{x}^*$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, sono soluzione del sistema (le soluzioni sono infinite). In particolare, l'insieme dei vettori soluzione è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ definito come segue

$$V = \{\mathbf{v} : A\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

Per studiarne la dimensione di V, possiamo ragionare come segue. Sappiamo che il sistema omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ può essere scritto in modo equivalente come segue

$$\mathbf{a}^1 x_1 + \mathbf{a}^2 x_2 + ... + \mathbf{a}^n x_n = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$$

Supponiamo che i primi $k\,(< n)$ vettori $\mathbf{a}^1, ..., \mathbf{a}^k$ siano tra loro linearmente indipendenti (se così non fosse riordinarli in modo che i primi k siano tra loro linearmente indipendenti), mentre i restanti $n-k$ dipendono linearmente dai primi k, ossia posso fissare ad arbitrio $x_{k+1}, ..., x_n$ e ancora ottenere, scegliendo x_1,...,x_k in modo consono che

$$\mathbf{a}^1 x_1 + ... + \mathbf{a}^k x_k = -\mathbf{a}^{k-1} x_{k+1} - ... - \mathbf{a}^n x_n$$

ma dalla scelta arbitraria di $x_{k+1}, ..., x_n$, ottengo $n-k$ vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$. Segue che la $\dim(V) = n-k$ e si dice che esistono ∞^{n-k} soluzioni per indicare che la soluzione dipendende da come scelgo i "parametri" $x_{k+1}, ..., x_n$. Per definizione, sappiamo che il rango di A ci indica il numero di righe e colonne di A linearmente indipendenti, segue che $\dim(V) = n - rango\,(A)$.

Summary 5 *Ricapitoliamo sui sistemi omogenei: Un sistema omogeneo* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

1. *ha sempre almeno una soluzione, ovvero la soluzione banale* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. *se è di Cramer (sistema quadrato e* $\det(A) \neq 0$*), ha un'unica soluzione, ossia il vettore nullo (soluzione banale).*
3. *se non è di Cramer, allora l'insime delle soluzioni del sistema costituisce un sottospazio vettoriale di dimensione* $\dim(V) = n - rango\,(A)$.

Come trovare V (sottospazio vettoriale insieme soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$)?

Solution 6 *Dato* $rango\,(A) = k$*, scegliere (a piacere)* k *righe di* A *tra loro linearmente indipendenti ed eliminare le restanti* $m-k$*. Otteniamo* $A^{(1)}$*, matrice con* k *righe linearmetne indipendenti. Costruire la matrice* $A^{(2)}$ *accostando* k *vettori colonna linearmente indipendenti di* $A^{(1)}$ *(scelti a piacere) e costruire* $\mathbf{b}^{(2)}$ *come* $\mathbf{b}$ *meno i restanti vettori colonna di* $A^{(1)}$ *moltiplicati per le rispettive incognite. Abbiamo ora il sistema*

$$A^{(2)}\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{b}^{(2)}$$

dove $\mathbf{x}^{(2)}$ *è il vettore contenente le sole incognite di* $\mathbf{x}$ *relative ai vettori colonna di* $A^{(1)}$ *utilizzati per costruire* $A^{(2)}$*. Tale sistema è di Cramer (per costruzione) nelle sole incognite contenute in* $\mathbf{x}^{(2)}$ *(le incognite non contenute in* $\mathbf{x}^{(2)}$ *le considero come parametri) e posso risolverlo con la regola di Cramer. Le soluzioni trovare saranno funzioni delle* $n-k$*, dove* $k = rango\,(A)$*, variabili (non contenute in* $\mathbf{x}^{(2)}$*) che ho considerato come parametri, ossia esistono* ∞^{n-k} *soluzioni.*

Applichiamo la procedura ad un esempio concreto.

Example 7 *Consideriamo il seguente sistema:*

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}}$$

trovo che $\det(A) = 0$ *e* $rango\,(A) = 2$*, ossia una riga di* A *è linearmente dipendenti dalle restanti. Noto ad esempio che l'ultima riga di* A *si può ottenere dalla seconda sottratta la prima (terza riga = seconda riga - prima riga), questo significa che soddisfatte le prime due righe, la terza è automaticamente soddisfatta. Elimino la terza riga e ottengo*

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{A^{(1)}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}^{(1)}}$$

un sistema equivalente a quello di partenza (ricordarsi che solo per sistemi omogenei, se $A^{(1)}$ è ottenuta eliminando da A una riga linearmente dipendente dalle restanti, allora i due sistemi $A^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sono equivalenti, ossia hanno lo stesso insieme di soluzioni) che può essere riscritto come segue:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Noto che il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è linearmente dipendente dagli altri due (allo stesso tempo avrei potuto scegliere il primo (il secondo) vettore essendo anch'esso linearmente dipendente dai restanti, in questo caso avrei ottenuto la soluzione in funzione di x_1 (x_2)). Porto $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3$ a destra:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \end{bmatrix} - - > \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}^{A^{(2)}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}^{(2)}}$$

e mi riconduco ad un sistema di Cramer (non omogeneo) nelle sole variabili x_1 e x_2, $A^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)}$, che risolvo utilizzando la regola di Cramer:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} x_3 \\ x_2 &= -\frac{2}{3} x_3 \end{aligned}$$

vale a dire, fissato $x_3 = x_3^*$ in modo arbitrario, il vettore soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è

$$\begin{bmatrix} \frac{x_3^*}{3} \\ -\frac{2x_3^*}{3} \\ x_3^* \end{bmatrix}$$

L'insieme soluzione è

$$V = \left\{ x_3^* \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} : x_3^* \in \mathbb{R} \right\}$$

Risolvere il sistema eliminando la prima riga invece della terza e verificare che l'insieme soluzione sia sempre lo stesso.

Exercise 8 *Trovare l'insieme soluzione V (sottospazio vettoriale) per i seguenti sistemi omogenei:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & -2 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto sappiamo risolvere tutti i sistemi omogenei e i sistemi di Cramer non omogenei. Passiamo allora ai sistemi non omogenei che non sono (necessariamente) di Cramer, per i quali non sappiamo ancora trovarne la soluzione.

SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI

Abbiamo visto che per i sistemi omogenei esiste sempre almeno una soluzione, ossia il vettore nullo. Ciò non è vero per i sistemi non omogenei. Per questi sistemi la soluzione può esistere ed essere unica (*sistemi determinati*), può esistere ed essere in numero maggiore di uno o meglio infinite (*sistemi indeterminati*), non esistere (*sistemi impossibili*).

In particolare, il seguente teorema ci dice quando un sistema lineare (qualsiasi) ha almeno una soluzione:

Theorem 9 (di Rouché-Capelli) *Condizione* ***necessaria e sufficiente*** *affinché il sistema di m equazioni in n incognite $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ abbia soluzione è che rango(A)=rango(A|b).*

Remark 10 *Il teorema ci dice se il sistema lineare ha almeno una soluzione, ma non ci indica quante.*

Remark 11 *Nota che trovare una soluzione di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivale a trovare dei coefficienti, tali per cui la combinazione lineare dei vettori colonna di A per tali coefficienti mi restituisce il vettore dei termini noti $\mathbf{b}$. Ma perché questo sia possibile, $\mathbf{b}$ deve essere linearmente dipendente dai vettori colonna di A, ossia $rango\,(A) = rango\,(A|\mathbf{b})$. Ciò equivale a dire che il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A := \left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, ..., \mathbf{a}^n\right]$, ha soluzione se e solo se $\mathbf{b} \in span\left(\left[\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, ..., \mathbf{a}^n\right]\right)$.*

Grazie al teorema di Rouché-Capelli siamo in grado di capire se un sistema lineare ha almeno una soluzione, ossia se il sistema è risolubile. Appurato che un sistema lineare è risolubile, cerchiamo ora di capire quante soluzioni esistono e come ottenerle. Per quantificare il numero di soluzioni di un sistema lineare risolubile, ci viene in aiuto il seguente teorema:

Theorem 12 *Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, sistema di m equazioni in n incognite, ammette una soluzione $\mathbf{x}_1$, le soluzioni del sistema sono i vettori in $\mathbb{R}^n$ del tipo*

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0 \text{ con } A\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$$

Pertanto il sistema non omogeneo ha ∞^{n-r} soluzioni con $r = rango\,(A)$.

Remark 13 *Notare che l'insieme delle soluzioni di una sistema lineare non omogeneo non costituiscono un sottospazio vettoriale.*

Quest'ultimo teorema ci permette di **discutere** i sistemi lineari.

Example 14 *Discutere il seguente sistema lineare al variare del parametro α:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\alpha \\ 0 & \alpha+1 & -\alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (k+1)k + k^2 = 2k^2 + k = k(2k+1) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow & k = 0 \\ \searrow & k = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

1. *Se $k \neq 0$ e $k \neq -\frac{1}{2}$ il sistema è di Cramer. Esiste un'unica soluzione.*
2. *Se $k = 0$, $rango(A) = 2 \neq rango(A|b) = 3$. Non esistono soluzioni.*
3. *Se $k = -\frac{1}{2}$, $rango(A) = rango(A|b) = 2$. Il sistema ha ∞^1 soluzioni.*

A questo punto ci resta da capire come calcolare le soluzioni per sistemi non omogenei che non sono di Cramer. L'idea è sempre la stessa. Dobbiamo trattare alcune variabili come parametri e ricondurci ad un sistema che è di Cramer per quelle variabili che non sono considerate come parametri.

Ovviamente dobbiamo assicurarci che $rango(A) = rango(A|\mathbf{b})$. Appurato ciò, possiamo procedere come segue:

1. Se $rango(A) < m$, significa che ci sono delle righe di A che sono linearmente dipendenti dalle altre. Le isoliamo e le eliminiamo, eliminiamo inoltre le componenti di $\mathbf{b}$ corrispondenti. Ottengo la matrice $A^{(1)}$ e il vettore dei termini noti $\mathbf{b}^{(1)}$, ossia il sistema equivalente $A^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)}$.

2. Per costruzione $rango\left(A^{(1)}\right)$ è uguale al numero di righe di $A^{(1)}$. Il sistema $A^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)}$, con $A^{(1)} := \left[\mathbf{a}^{(1),1}, \mathbf{a}^{(1),2}, ..., \mathbf{a}^{(1),n}\right]$, può anche essere scritto come:

$$\mathbf{a}^{(1),1}x_1 + \mathbf{a}^{(1),2}x_2 + ... + \mathbf{a}^{(1),n}x_n = \mathbf{b}^{(1)}$$

   Essendo $rango\left(A^{(1)}\right) = k$, esistono k vettori colonna di $A^{(1)}$ linearmente indipendenti, mentre i restanti $n-k$ sono dipendenti dai primi. Isolo k vettori linearmente indipendenti a sinistra dell'equazione (supponiamo che siano i primi k) e i restanti gli "porto" a destra del segno di uguale:

$$\mathbf{a}^{(1),1}x_1 + \mathbf{a}^{(1),2}x_2 + ... + \mathbf{a}^{(1),k}x_k = \mathbf{b}^{(1)} - \mathbf{a}^{(1),k+1}x_{k+1} - ... - \mathbf{a}^{(1),n}x_n$$

   e costruisco la matrice $A^{(2)}$ come matrice dei k vettori colonna linearmente indipendenti di $A^{(1)}$ che ho isolato, mentre il nuovo vettore dei termini noti lo definisco come segue:

$$\mathbf{b}^{(2)} = \mathbf{b}^{(1)} - \mathbf{a}^{(1)k+1}x_{k+1} - ... - \mathbf{a}^{(1)n}x_n$$

3. A questo punto ho un sistema che è di Cramer nelle variabili x_1, x_2,...,x_k:

$$A^{(2)}\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{b}^{(2)}$$

   che risolvo con il metodo di Cramer. La soluzione dipenderà da x_{k+1},...,x_n, ossia esistono ∞^{n-k} soluzioni.

Example 15 *Trovare la soluzione del seguente sistema in n=4 incognite e m=5 equazioni:*

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 7 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}}$$

utilizzando la regola di Kronecker e dopo essermi calcolato diversi minori di A, scopro che $rango(A) = 2 = rango(A|b)$. *Questo significa che il sistema ammette* ∞^2 *soluzioni e in A (lo stesso in* $A|b$*) esistono 5-2=3 righe che possono essere espresse come combinazione lineare delle restanti, ossia esistono 3 equazioni (delle 5) che sono automaticamente soddisfatte una volta soddisfatte le restanti due. Ad esempio, noto che riga 3 = riga 1 - riga 2, riga 4 = riga 1 + 2 volte riga 2 e riga 5 = (-1)*riga 1. Posso, eliminare le ultime tre equazioni e ricondurmi ad un sistema equivalente in 2 equazioni e 4 incognite:*

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}}^{A^{(1)}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}^{(1)}}$$

a questo punto, noto che le prime 2 colonne di A sono due vettori linearmente indipendenti, mentre le restanti due colonne di A sono due vettori linearmente dipendenti dai primi due. Riscrivo il sistema nelle sole incognite x_1 *e* x_2*, trattando* x_3 *e* x_4 *come fossero parametri:*

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}^{A^{(2)}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{x}^{(2)}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 - x_3 + x_4 \\ 3 + x_3 - 2x_4 \end{bmatrix}}^{\mathbf{b}^{(2)}}$$

$A^{(2)}\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{b}^{(2)}$ *è un sistema di Cramer, che risolvo utilizzando la regola di Cramer:*

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 + 5x_3 - 8x_4 \\ x_2 &= -2 - 2x_3 + 3x_4 \end{aligned}$$

le soluzioni trovate dipendono da x_3 *e* x_4*, ossia sono* ∞^2.

Exercise 16 *Trovare le soluzioni dei seguenti sistemi:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & -5 & -9 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 21 \\ -6 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Example 17 *Dato il seguente sistema*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Noto che rango $(A) =$ *rango* $(A|\mathbf{b}) = 2$, *ossia esistono due equazioni del sistema che sono automaticamente soddisfatte una volta verificate le restanti. A tal proposito, indicare quale dei seguenti sistemi è equivalente a quello dato:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

La risposta è semplice, solo il terzo. Infatti, nel primo ho eliminato due righe di A *(meglio di* $A|\mathbf{b}$*) che sono linearmente indipendenti da quelle non eliminate. Stessa cosa nel secondo caso.*

Alla fine di queste note sulle lezioni relative ai sistemi lineari, possiamo riassumere quanto segue:

Summary 18 *Sia* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *un sistema in* n *incognite con* m *equazioni:*

[1] *Se rango* $(A) <$ *rango* $(A|b)$, *il sistema è privo di soluzioni;*

[2] *Se rango* $(A) <$ *rango* $(A|b) = n$, *il sistema ha un'unica soluzione;*

[3] *Se rango* $(A) =$ *rango* $(A|b) < n$, *il sistema ha infinite soluzioni.*