$\Rightarrow$ **Es di compito!**

$$\int (\sin x)^2 (\cos x)^4 \, dx$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)\left(\frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)\left(\frac{1}{4}\left(1 + (\cos 2x)^2 + 2\cos 2x\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - \cos 2x\right)\left(1 + (\cos 2x)^2 + 2\cos 2x\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + (\cos 2x)^2 + 2\cos 2x - \cos 2x - (\cos 2x)^3 - (2\cos 2x)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(-(\cos 2x)^3 - (\cos 2x)^2 + \cos 2x + 1\right)$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(-(\cos 2x)^3 - (\cos 2x)^2 + \cos 2x + 1\right) dx$$

$$\int +(\cos 2x)^3 \, dx$$

$$= \int + \cos 2x (\cos 2x)^2 \, dx$$

$$= \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx$$

$$\sin 2x = t$$

$$2 \cos 2x \, dx = dt$$

$$\cos 2x \, dx = \frac{dt}{2}$$

$$\Rightarrow \int (1 - t^2) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{(\sin 2x)^3}{3}\right)$$

$$\int (\cos 2x)^2 \, dx$$

Rifaccio la sostituzione:

$$(\cos 2x)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2(2x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

$$\Rightarrow \int (\cos 2x)^2 \, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{4}$$

Mettendo insieme i pezzi:

$$\frac{1}{8}\left[-\frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{(\sin 2x)^3}{3} \right) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 2x}{2} + x \right] + c$$

ES FUNZIONI TRIG. RAZIONALI

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$$

$t = tg \frac{x}{2}$ $\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

~~dxa~~ $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Sostituendo:

$$\int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{2t+1-t^2}{\cancel{1+t^2}}} \cdot \frac{2}{\cancel{1+t^2}} dt$$

$$= -2 \int \frac{1}{t^2-2t-1} dt$$

$$t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2} \begin{cases} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$(t - (1+\sqrt{2}))(t-(1-\sqrt{2}))$$

$$\frac{A}{(t-1-\sqrt{2})} + \frac{B}{(t-1+\sqrt{2})}$$

$$A(t-1+\sqrt{2}) + B(t-1-\sqrt{2}) =$$

$$At - A + A\sqrt{2} + Bt - B - \sqrt{2}B =$$

$$= (A+B)t + (-A + \sqrt{2}A - B - \sqrt{2}B)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+\sqrt{2}A - B - \sqrt{2}B = 1 \end{cases} \qquad A = -B$$

$$\cancel{B} - \sqrt{2}B - \cancel{B} \mp \sqrt{2}B = 1$$

$$\cancel{2B} - 2\sqrt{2}B = 1 \qquad B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cancel{2B(1-\sqrt{2}) = 1}$$

$$\cancel{B = \frac{1}{2(1-\sqrt{2})}} \qquad A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= -2\int \frac{1}{2\sqrt{2}(t-1-\sqrt{2})} - \frac{1}{2\sqrt{2}(t-1+\sqrt{2})}\,dt$$

$$= -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}\int \frac{1}{(t-1-\sqrt{2})} - \frac{1}{(t-1+\sqrt{2})}\,dt$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln|t-1-\sqrt{2}| - \ln|t-1+\sqrt{2}|\right) + c$$

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

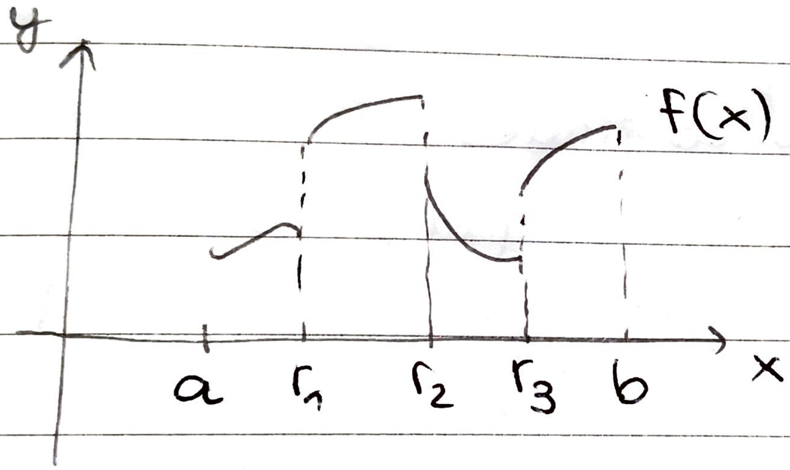
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}\right| + c$$

INTEGRALI di FUNZIONI DISCONTINUE

Se una funzione $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ presenta un numero FINITO di SALTI nei punti $r_1, r_2, \dots, r_k$, allora

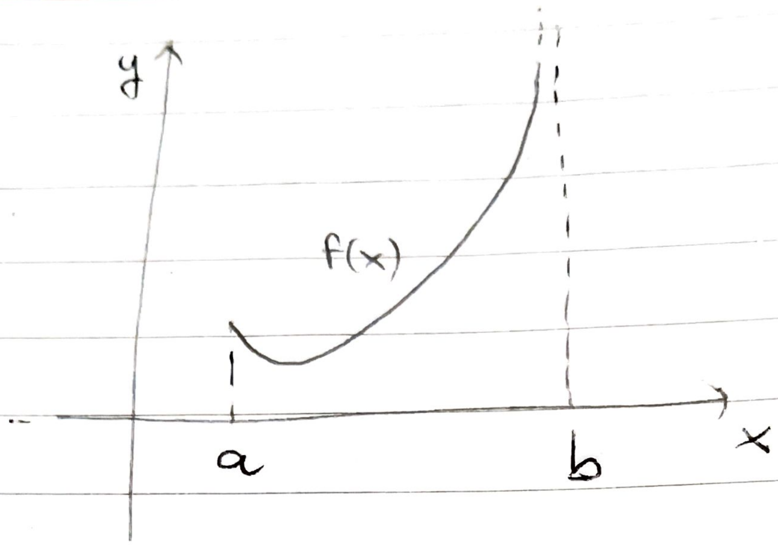
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{r_1} f(x)\,dx + \int_{r_1}^{r_2} f(x)\,dx + \dots + \int_{r_k}^{b} f(x)\,dx$$

CALCOLO dell' integrale come SOMMA FINITA di INTEGRALI



Valgono le usuali proprietà dell' integrale all'infuori del teorema della MEDIA (perchè f(x) NON è continua)

INTEGRAZIONE di FUNZIONI NON LIMITATE



$f : [a,b) \to \mathbb{R}$ continue

$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ (analogo sarebbe il caso $\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$)

Come definire l'integrale?

Fissato ε piccolo a piacere $(\varepsilon > 0)$, integro fino a $b - \varepsilon$; poi passo al limite per $\varepsilon \to 0^+$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

CASI

① Se $\lim_{\varepsilon \to 0^+}$ $\exists$ FINITO $\Rightarrow$ f e' integrabile in $[a,b]$

oppure $\int_a^b f(x)\,dx$ e' CONVERGENTE

② se $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \pm\infty$

allora l'integrale e' DIVERGENTE

③ $\nexists \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Rightarrow \nexists$ l'integrale

(Analogo il caso $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ e
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \}$, si pone
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$)

Esempio

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \qquad \alpha > 0$$

Caso $\boxed{\alpha = 1}$ $\Rightarrow$ $\int_a^b \frac{1}{b-x} dx$

C.E: $b-x \neq 0 \qquad x \neq b$

$$\lim_{x \to b^-} \frac{1}{b-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{1}{b-x}\,dx = -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= -\ln(b-(b-\varepsilon)) - (-\ln(b-a)) =$$

$$= -\ln(b-b+\varepsilon) + \ln(b-a)$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} -\ln(\varepsilon) + \ln(b-a) = +\infty + \ln(b-a)$$

$$= \boxed{+\infty}$$

$\Rightarrow$ l'integrale è DIVERGENTE !

caso $\boxed{\alpha \neq 1}$

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(-(b-x)^{1-\alpha}\right)\Big|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(-(\cancel{b}-\cancel{b}+\varepsilon)^{1-\alpha} + (b-a)^{1-\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left[-\varepsilon^{1-\alpha} + (b-a)^{1-\alpha}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left[-\varepsilon^{1-\alpha} + (b-a)^{1-\alpha}\right]$$

$\nearrow$ $+\infty$ se $\alpha > 1$ DIVERGENTE

$\searrow$ $\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ se $\alpha < 1$ CONVERGENTE

CRITERI di INTEGRABILITA' al FINITO

$f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ continue e

$$\boxed{\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = +\infty}$$

I seguenti criteri permettono di stabilire se l'integrale e' convergente o divergente senza calcolarlo:

Ⓐ <u>CONFRONTO</u> Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in $[a,b)$

$\Rightarrow$ g integrabile $\Rightarrow$ f integrabile

f non integrabile $\Rightarrow$ g non integrabile

"Dimostrazione":

Per la proprietà di MONOTONIA

$$0 \leq \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \leq \int_a^{b-\varepsilon} g(x)\,dx$$

e passando al $\lim_{\varepsilon \to 0^+}$ si ha il risultato.

Ⓑ CONFRONTO ASINTOTICO

se $f>0$, $g>0$ e $f \sim g$ per $x \to b^-$ allora

f integrabile $\Leftrightarrow$ g è integrabile

Esempi

① $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{1-x} \cdot \sqrt[3]{1+x}}$$

CE: $1-x \neq 0$ $\quad 1 \neq x$

$1+x \neq 0$ $\quad x \neq -1$

$\Rightarrow$ in $[0,1]$ è continua e $f(x)>0$ in $[0,1]$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

$f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{1-x}}$ per $x \to 1^-$ dove

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{1-x}} = g(x) \Rightarrow f(x) \sim g(x) \text{ per } x \to 1^-$$

$g(x)$ e' positiva e continua in $[0,1]$
$g(x)$ e' integrabile ($\alpha = 1/3$)

(vedi esempio
INTEGRAZIONE di FUNZIONI
NON LIMITATE)

$\Rightarrow f(x)$ e' integrabile in base al confronto asintotico.

(2) $$\int_1^3 \frac{1}{x^2-5x+4}\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-5x+4} = \frac{1}{(x-1)(x-4)}$$

$S = -5$
$P = +4$

CE: $x \neq 1$
$x \neq 4$ $\Rightarrow f(x)$ in $[1,3]$ e' continue

$f(x) < 0$ in $[1,3]$

$\Rightarrow -f(x) > 0$ in $[1,3]$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

$$-f(x) \sim \frac{1}{3(x-1)} \quad \text{per } x \to 1^+$$

chiamiamo $\dfrac{1}{3(x-1)} = g(x)$

$g(x)$ e' continua e positiva in $[1,3]$

$g(x)$ NON e' integrabile ($\alpha = 1$, sempre esercizio precedente)

$\Rightarrow$ anche $-f(x)$ e $f(x)$ non sono integrabile

$\Rightarrow$ l' integrale e' DIVERGENTE

Esempio

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \sin\left(\frac{1}{0^+}\right) < \infty$$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ illimitata (∞)

il suo segno è variabile

⇒ per funzioni di questo tipo i criteri del confronto e del confronto asintotico non sono applicabili.

Vale invece:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \text{ convergente}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) \text{ convergente}$$

se $|f|$ è integrabile in $[a,b]$ si dice che f è assolutamente integrabile in $[a,b]$

Quindi

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

N.B! $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 1$

ma $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ha integrale convergente

$\Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ ha integrale convergente

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è assolutamente convergente!