INTEGRAZIONE per SOSTITUZIONE

Sia G: $G'(x) = f(x)$ in $[a,b]$

Sia ora $x = \varphi(t)$ una funzione derivabile con continuità su $[\alpha, \beta]$:

$$\varphi(\alpha) = a \qquad \text{(ricostruisco gli}$$
$$\varphi(\beta) = b \qquad \text{estremi)}$$

(oppure, equivalentemente

$$\varphi(\beta) = a$$
$$\varphi(\alpha) = b \;)$$

Dal teorema di DERIVAZIONE delle funzioni COMPOSTE si ha che:

$$\frac{d}{dt} G(\varphi(t)) = G'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) =$$
$$= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

[perché avevamo detto che $G'(x) = f(x)$]

cioè

$$\boxed{G(x) \text{ è primitiva di } f(x) \overset{\text{SE E SOLO SE}}{\Longleftrightarrow} G(\varphi(t)) \text{ è PRIMITIVA di } f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)}$$

Da qui ricaviamo la FORMULA di INTEGRAZIONE per SOSTITUZIONE

$$G(x) = \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = G(\varphi(t))$$

con $x = \varphi(t)$

[la formula si può anche ricostruire in questo modo.

Se $x = \varphi(t)$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{cases}$

$dx = \varphi'(t)\,dt$

sostituendo x e dx abbiamo

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$]

INTEGRALE DEFINITO:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$a = \varphi(\alpha)$
$b = \varphi(\beta)$

RICORDARSI il CAMBIO di ESTREMI di INTEGRAZIONE !!

Esempi

① Integrazione per scomposizione

$$\int (4x^2 + 5x + 1)\,dx =$$

$$\int 4x^2 dx + \int 5x\,dx + \int 1\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x + c$$

③ $\int tgx\,dx =$ PER SOSTITUZIONE

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

$\cos x = t$

$-\sin x\,dx = dt$

vedo che al num ho la derivata del den.

non sto ad esplicitare cosa è x come ho fatto prima

Calcolo la derivata a sx e dx

$$= \int -\frac{dt}{t} = -\int \frac{1}{t}\,dt = -\log|t| + c$$

Adesso, ricordando che $t = \cos x$

$= -\log|\cos x| + c$

In generale, la formula per sostituzione ci ha permesso di ricavare che

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$$

dove $f(x) = t$

$f'(x)\,dx = dt$

4 $$\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$\alpha \neq -1$

(sennò ricado nel caso di prima!)

$f(x) = t$

$f'(x)\,dx = dt$ $\Rightarrow \int t^{\alpha}\,dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

$$= \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

prendiamo

$f(x)$ e $g(x)$ derivabili in $[a, b]$

Sappiamo che:

$$(fg)' = fg' + f'g$$

da cui, esplicitando

$$fg' = (fg)' - f'g$$

ma sappiamo anche che

$$\int (fg)' dx = fg$$

Da queste due osservazioni ricaviamo la formula di ~~sostituzione~~ INTEGRAZIONE per PARTI

$$\int f(x)\, g'(x) = \int (fg)' dx - \int f'(x) g(x) dx$$

$$= f(x)\, g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Esempio

① $\int \underbrace{x}_{f(x)}\,\underbrace{\sin x}_{g'(x)}\,dx =$

$f(x) = x$

$g'(x) = \sin x \qquad g(x) = -\cos x$

$= \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{g(x)}\,dx =$

$= -x\cos x + \int \cos x\,dx =$

$= -x\cos x + \sin x + c$

INTEGRAZIONE delle FUNZIONI RAZIONALI

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$$

$P_n(x)$ e $Q_m(x)$ polinomi di grado n e m rispettivamente

1. se $n \geq m$ (grado del numeratore maggiore del grado del denominatore) si esegue la DIVISIONE fra polinomi

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$$

$R(x)$ = Resto della divisione

grado di $A(x) = n - m$
grado di $R(x)$: minore di m !

Se $Q_m(x)$ e' scomponibile

$\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ puo' essere riscritto come somma di funzioni piu semplici

2. se $n < m$ ricadiamo GIA' nel caso

$\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ → dobbiamo anche qui controllare se Q_m e' SCOMPONIBILE !

Esempio

$$\int \frac{x^4+3x^3-4x^2-9}{x^2+x-6}$$

$n \geq m$

dividiamo

$$\begin{array}{cccccc|c}
x^4 & +3x^3 & -4x^2 & +0 & -9 & & x^2+x-6 \\ \cline{7-7}
-x^4 & -x^3 & +6x^2 & & & & x^2+2x \\ \cline{1-6}
0 & 2x^3 & +2x^2 & +0 & -9 & & \\
 & -2x^3 & -2x^2 & +12x & & & \\ \cline{2-7}
 & / & / & 12x & -9 & &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4+3x^3-4x^2-9}{x^2+x-6} = x^2+2x+\frac{12x-9}{x^2+x-6}$$

$$\int x^2+2x+\int \frac{12x-9}{x^2+x-6}$$

Concentriamoci su

$$\int \frac{12x-9}{x^2+x-6} = \int \frac{12x-9}{(x+3)(x-2)}$$

$S=1$
$P=-6$
$(3)(-2)$ $\quad (x+3)(x-2)$

Ora cerchiamo di spezzare in 2 integrali semplici:

$$\frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{12x-9}{(x+3)(x-2)}$$

$$\frac{A(x-2)+B(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{Ax-2A+Bx+3B}{(x+3)(x-2)} =$$

$$= \frac{x(A+B)+(-2A+3B)}{(x+3)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=12 \\ -2A+3B=-9 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=12-B \\ -24+2B+3B=-9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ 5B=15 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A=12-3=9 \\ B=3 \end{matrix}$$

$$\int \frac{12x-9}{(x+3)(x-2)} = \int \frac{9}{x+3} + \frac{3}{x+2}$$

Riunendo tutti i pezzi:

$$\int x^2+2x + \int \frac{9}{x+3} + \int \frac{3}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 9\log|x+3| + 3\log|x+2| + c$$

$\Rightarrow$ Se $n < m$

e Q_m e' un quadrato perfetto.

Risoluzione "immediata":

$$\int \frac{x+1}{(3x+2)^2} dx$$

SOSTITUZIONE.

$3x+2 = t \Rightarrow x = \frac{t-2}{3}$

$3dx = dt$

$dx = \frac{dt}{3}$

$$= \int \frac{\frac{t-2}{3}+1}{t^2}\,\frac{dt}{3} = \int \frac{\frac{t-2+3}{\cancel{3}}}{t^2}\,\frac{dt}{\cancel{3}} =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{t+1}{t^2}\,dt = \frac{1}{9}\int \frac{t}{t^2}+\frac{1}{t^2} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\int \frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{9}\left(\log|t| + \left(-\frac{1}{t}\right)\right)+c\right.$$

$$\downarrow$$

$$t^{-2}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\log|3x+2| - \frac{1}{3x+2}\right)+c$$

$$-1$$