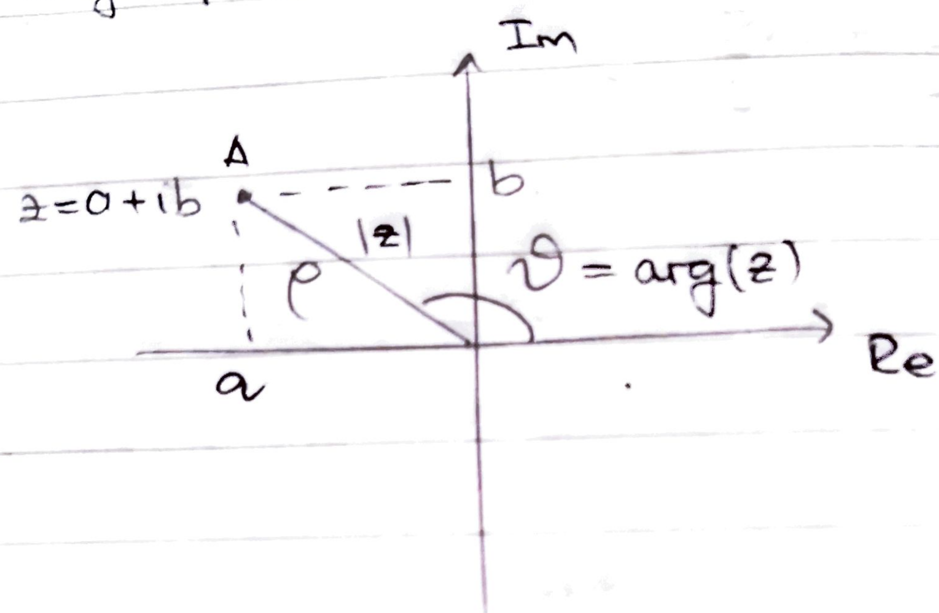
FORMA TRIGONOMETRICA

ρ = raggio polare

ϑ = angolo polare



punto A $\rightarrow \rho, \vartheta$

$\overset{\shortparallel}{z} \rightarrow \rho = |z|$

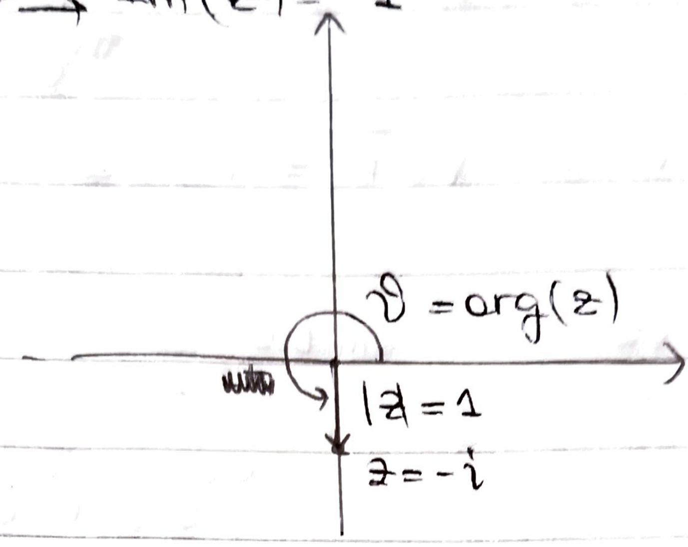
$\underbrace{k2\pi + \vartheta = \arg(z)}$ uno qualsiasi degli angoli

$\downarrow$

per ovviare a questa indeterm. spesso si fissa un intervallo in cui det. l'angolo

Esempio $\quad Re(z) = 0$

$z = -i \nearrow \searrow Im(z) = -1$



$|z| = 1$

$\vartheta = \frac{3\pi}{2} \qquad \vartheta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

Se $[0; 2\pi] \Rightarrow \vartheta = \arg(z) = \frac{3\pi}{2}$

Se $[-\pi; \pi] \Rightarrow \vartheta = -\frac{\pi}{2}$

Dato il numero:

$z = a + ib \qquad z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$\Updownarrow$

formule geom. $\begin{cases} a = \rho \cdot \cos\vartheta \\ b = \rho \cdot \sin\vartheta \end{cases} \Rightarrow \boxed{z = \rho\cos\vartheta + i\rho\sin\vartheta}$

forma trigonometrica di un numero complesso.

All'inverso:

$\rho = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \cos\vartheta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

PITAGORA!

Esempio

dato $z = \sqrt{3} + i$ scriverlo in forma trig.

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\vartheta = \frac{1}{2} \qquad \left(\vartheta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)$$

da questi devo risalire all'angolo!

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Devo stabilire il valore di ϑ !!

FORMULA di DE MOIVRE

ci serve per

→ forma trigonometrica per prodotti e quozienti!!

(*) $z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)$

$z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)$

$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2) =$

$= \rho_1\rho_2(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 + i\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + i\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2) =$

$= \rho_1\rho_2(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2 + i(\cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \cos\vartheta_2\sin\vartheta_1))$

RICONOSCIAMO le formule di SOMMA di ANGOLI!

$= \rho_1\rho_2(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\sin(\vartheta_1+\vartheta_2))$

(*) se $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)}{\rho_2(\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1}{\cos\vartheta_2 + i\sin\vartheta_2}\cdot\frac{(\cos\vartheta_2 - i\sin\vartheta_2)}{(\cos\vartheta_2 - i\sin\vartheta_2)}$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 - i\sin\vartheta_2)}{\cos^2\vartheta_2 + \sin^2\vartheta_2}$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\cos(\underbrace{\theta_1 - \theta_2}_{\arg}) + i\sin(\underbrace{\theta_1 - \theta_2}_{\arg}) \right)$$

Da queste formule si ricava che (PRIMO importante RISULTATO)

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

In generale, il prodotto di n numeri complessi sarà

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdots \rho_n \left(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots \theta_n) \right)$$

Se gli n numeri sono tutti uguali, si ottiene

$$\underbrace{z^n = \rho^n \left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \right)}$$

TEOREMA di DE MOIVRE!

NECESSARIO RIPASSO TRIGONOMETRIA !

Esempio 1

Scrivere in forma algebrica $(1+i)^7$

1. Determiniamo modulo (ρ) e argomento (ϑ) di z E poi applichiamo de Moivre!

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\vartheta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin\vartheta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \quad \vartheta = \frac{\pi}{4}$$

$$z^7 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^7$$

$$= (\sqrt{2})^7 \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$\downarrow$$

$$2^{\frac{7}{2}} = 2^{\frac{6}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^3 \cdot \sqrt{2}$$

$$= 8\sqrt{2}$$

$$z^7 = 8\sqrt{2}\left(\underbrace{\cos\frac{7\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\underbrace{\sin\frac{7\pi}{4}}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$$

$$z^7 = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$= 8 - 8i$ $\Rightarrow$ dovevo tornare alla forma algebrica!

$z_1 = 0$

$z_2 = \cos \frac{2}{3}k\pi + i \sin \frac{2}{3}k\pi$ per $k = 0, 1, 2$

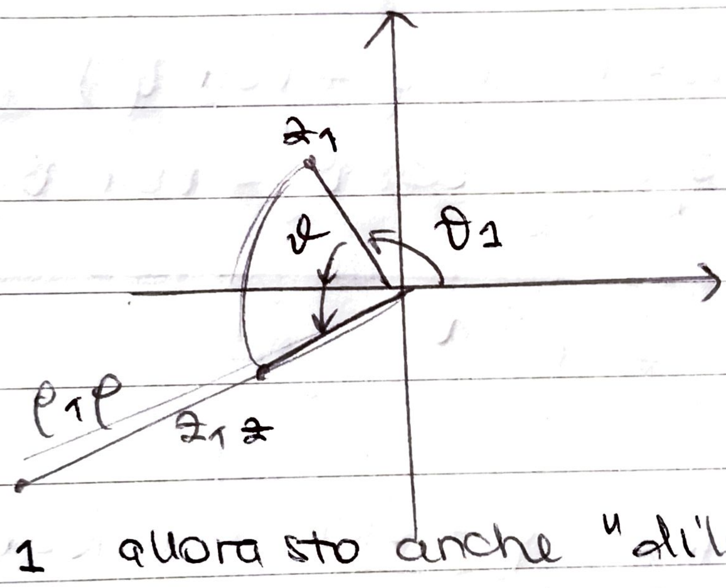
Per non prendere ancora gli stessi di prima!

Interpretazione geom. del PRODOTTO di 2 NUM. COMPLESSI

Se $z = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$ (modulo $= 1$)

$z_1 \cdot z = \rho_1 (\cos(\vartheta_1 + \vartheta) + i\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2))$

È ancora z_1, ma ho "ruotato" di ϑ



Se $\rho \neq 1$ allora sto anche "dilatando" di $\rho_1\rho_2$

VADEMECUM FORMULE TRIGONOMETRICHE

Identità fondamentale $\Rightarrow$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

FORMA ESPONENZIALE

Bisogna utilizzare l'identità di Eulero (formula di Eulero)

$$e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i\sin\vartheta$$

la formula di Eulero si trova più frequentemente nella forma più bella

$\vartheta = \pi$

$$e^{i\pi} = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$$

Sapendo che

$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

e utilizzando immediatamente la formula di Eulero si ricava che

$$z = \rho e^{i\vartheta}$$

il significato geom. di ρ e ϑ ovviamente non cambia!