RADICI n-ESIME

Dato $w \in \mathbb{C}$, se $\exists\, z \in \mathbb{C}$:

$z^n = w$ allora z è una radice complessa di w

TEOREMA

Sia $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ e n intero ≥ 1

$\exists$ precisamente <u>n radici</u> n-esime complesse

$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ di w.

posto $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$z_k = \rho_k(\cos\vartheta_k + i\sin\vartheta_k)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \rho_k &= r^{1/n} \\ \vartheta_k &= \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}}$$

Esempio

① $w = -1$ $\qquad \sqrt[3]{-1} = -1$ in $\mathbb{R}$

in $\mathbb{C}$?

Quante radici avrò in $\mathbb{C}$?

$z_k^3 = -1$ $\qquad z_0$

z_1 ?

z_2

forma trig.

$w = -1 \Rightarrow \cancel{\rho} \quad r = 1 \quad \varphi = \pi$

$\cancel{\vartheta =}$

$\rho_k = 1^{1/3} = 1$

$\vartheta_k = \dfrac{\pi + 2k\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2}{3}k\pi \qquad k = 0, 1, 2$

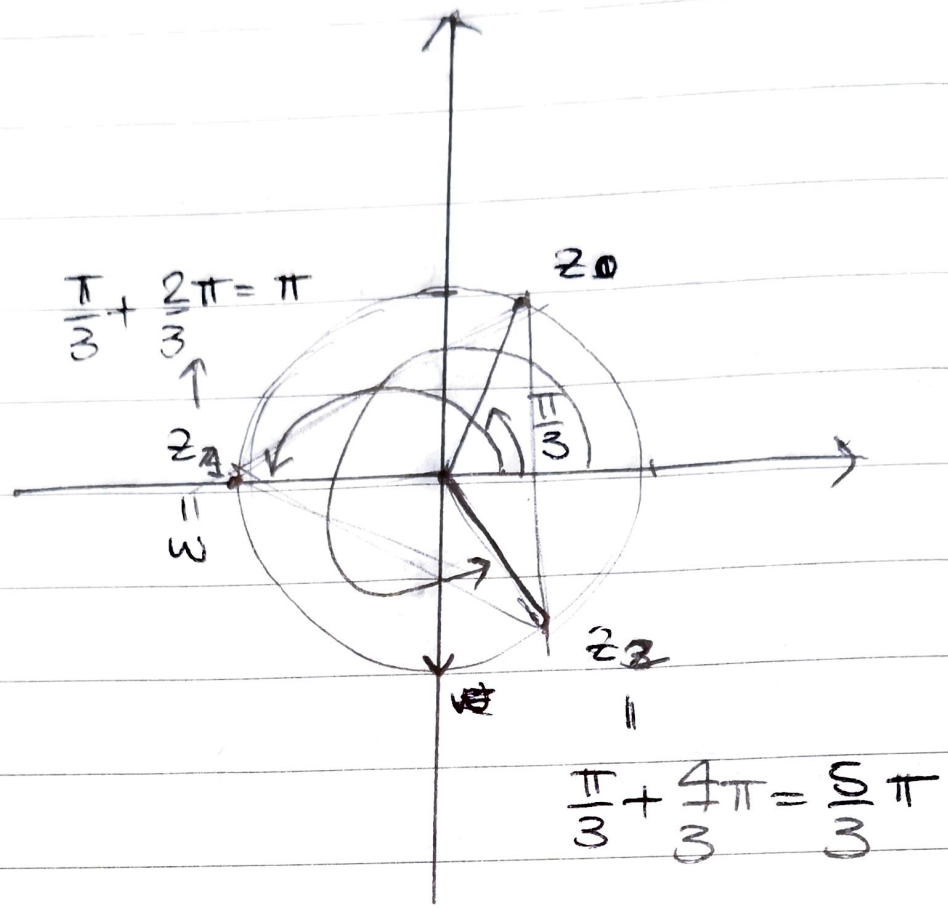
da cui.

$z_0 = \cancel{\pi} \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$

$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi\right)$

$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi\right)$

Guardiamole nel piano.



$$z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = -1$$

$$z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ le radici n-esime sono gli affissi vertici di un poligono regolare (di n lati!) inscritto nella circonferenza avente raggio ρ_k!

Esempio

calcolare $\sqrt[5]{1+i}$

Quindi

$$w = 1 + i \qquad z_k^5 = 1 + i$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \rho_k = (\sqrt{2})^{1/5}$$

$$\vartheta_k = \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{5} = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}$$

$$z_k = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)\right)$$

$$k = 0, 1, \ldots 4$$

... da concludere

RADICI QUADRATE

con il simbolo $\sqrt{z}$ si intendono 2 numeri complessi di segno opposto!

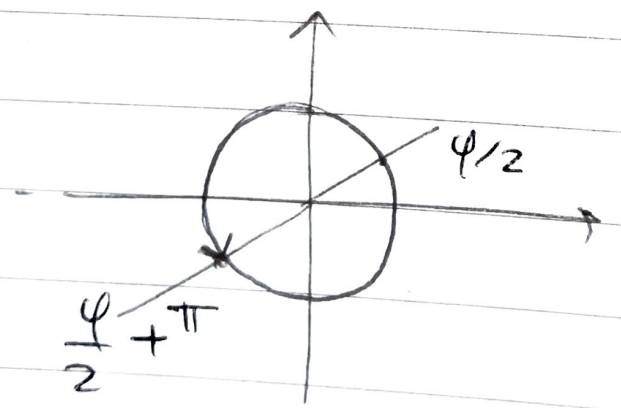
$w_1 = -w_2$ tali che:

$$|w| = \sqrt{|z|}$$

$$\vartheta_w = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \qquad k = 0, 1 \quad n = 2$$

$$= \frac{\varphi}{2} + k\pi \nearrow \frac{\varphi}{2} \text{ per } k = 0$$

$$\searrow \frac{\varphi}{2} + \pi \text{ per } k = 1$$



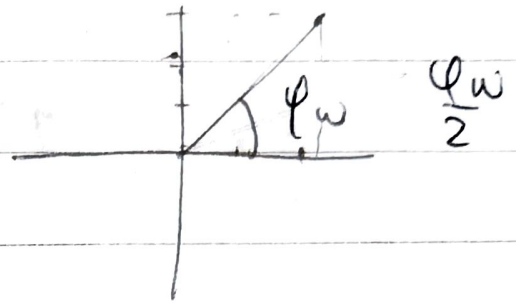
I due angoli (differendo di φ) sono tali che

$$\sin\frac{\varphi}{2} = -\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)$$

$$\cos\frac{\varphi}{2} = -\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)$$

$\Rightarrow$ Allora i due numeri che si ottengono sono opposti!

Esempio



$z = \sqrt{2+3i}$

$w = 2+3i$

$|w| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\cos \varphi_w = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\sin \varphi_w = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\frac{\varphi_w}{2}$ si trova nel I° quadrante

$\Rightarrow \cos \frac{\varphi_w}{2}$?

$\Rightarrow \sin \frac{\varphi_w}{2}$?

Quanto valgono?

Applichiamo la formula di bisezione.

REMIND:

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}, \quad \sin\frac{\vartheta}{2} = \cancel{\pm\sqrt{\frac{1+\sin\vartheta}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}}$$

la scelta del segno dipende dal quadrante in cui si colloca l'angolo.

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{13}+2}{\sqrt{13}}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2\sqrt{13}}}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - 2/\sqrt{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2\sqrt{13}}}$$

Dunque

$$z_1 = \sqrt{\sqrt{13}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2\sqrt{13}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2\sqrt{13}}}\right)$$

$$z_2 = -\sqrt{\sqrt{13}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2\sqrt{13}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2\sqrt{13}}}\right)$$

EQUAZIONI di SECONDO GRADO nel CAMPO COMPLESSO.

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{C}$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\sqrt{}$ va inteso in "senso complesso" il $\pm$ diventa "superfluo" perchè nel campo complesso denota 2 numeri di segno opposto!

Esempio

$$z^2 + 2iz - \sqrt{3}i = 0$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 2i \\ c &= -\sqrt{3}i \end{aligned}\right\} \quad \text{I coef} \in \mathbb{C}\,!!$$

Usando la formula:

$$z = \frac{-2i \pm \sqrt{-4-4(-\sqrt{3}i)}}{2} =$$

$$= \frac{-2i \pm \sqrt{-4+4\sqrt{3}i}}{2} =$$

$$= \frac{-i \pm \sqrt{-1+i\sqrt{3}}}{}$$

Sotto radice ho il numero $w = -1 + i\sqrt{3}$

$\rho = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\vartheta = -\frac{1}{2}$ $\qquad \vartheta = \frac{2}{3}\pi$

$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cancel{z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}$$

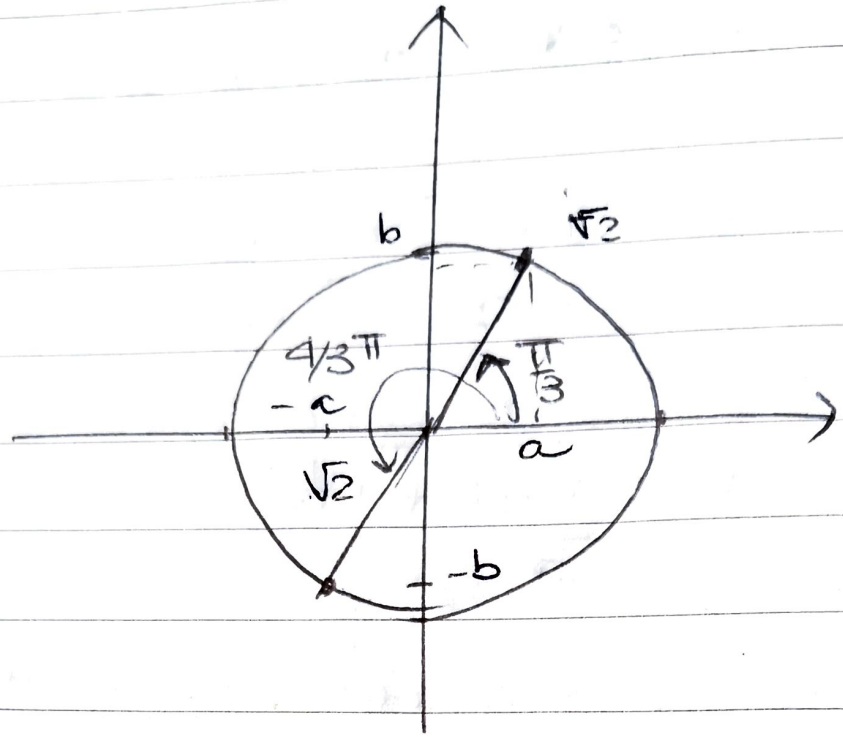
$$\cancel{z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\right.}$$

$\rho_k = \sqrt{2}$

$\vartheta_k = \frac{2}{3}\pi / 2 + \frac{2k\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \qquad k = 0, 1$

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$



opporto $\Rightarrow$ ci metto il $-$ davanti

E' giusto!

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\underbrace{\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi}_{\text{il } - \text{ viene fuori da qui!}}\right)$$

E' corretto!

La radice quadrata in campo complesso ha sempre 2 soluzioni, una l'opposta dell'altra !!

Per cui, tornando all'esercizio:

$$-i \pm \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$-i \pm \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$z_1 = -i + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1\right)$$

In generale

$$z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2} - 1\right)$$

CONCLUSIONE (OSSERVAZIONE)

Un polinomio del tipo

$z^n + a$ (con a complesso)

ha in $\mathbb{C}$ esattamente n radici!

$(z^n + a = 0, \; z^n = -a)$

Cosa succede in $\mathbb{R}$?

$x^n + a = 0$ può avere 2, 1 o NESSUNA radice!

Es $x^2 - 1 = 0$ 2 radici

$x^3 - 1 = 0$ 1 radice

$x^2 + 1 = 0$ 0 radici

$\Downarrow$

In realtà $x^n + a$ ha n radici in $\mathbb{C}$, MA SOLO OCCASIONALMENTE 1 o 2 di ESSE stanno in $\mathbb{R}$.

Generalizzando, potriamo dire che

TEOREMA FONDAMENTALE dell'ALGEBRA

Un'equazione polinomiale della forma

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0 \quad (a_n \neq 0)$$

con $a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}$

ha precisamente n radici in $\mathbb{C}$, se ognuna viene calcolata con la sua molteplicità.