INTEGRAZIONE SU INTERVALLI ILLIMITATI

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua

Poniamo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{w \to +\infty} \int_a^{w} f(x)\,dx$$

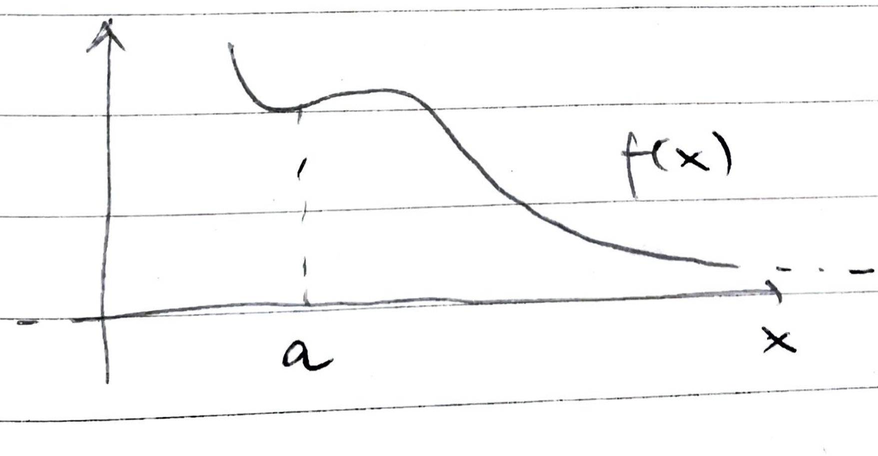
(quindi w diventa una variabile!)

Ⓐ se il $\lim_{w \to +\infty}$ $\exists$ finito $\Rightarrow$ f(x) si dice integrabile in $[a, +\infty)$

oppure che $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e' CONVERGENTE

Ⓑ se il $\lim_{w \to +\infty} = \pm\infty \Rightarrow$ l'integrale e' DIVERGENTE

Ⓒ se $\nexists \lim_{w \to +\infty} \Rightarrow \nexists$ l'integrale



Analogamente se $f:(-\infty, b] \to \mathbb{R}$ continua,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\omega \to -\infty} \int_{\omega}^{b} f(x)dx$$

Se $f:(-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

con c punto qualunque

Esempio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \qquad \alpha > 0$$

caso $\boxed{\alpha = 1}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{w \to +\infty} \int_1^{w} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \lim_{w \to +\infty} \left(\ln(x) \Big|_1^{w} \right) = \cancel{\lim_{w \to +\infty} \ln(}$$

$$= \lim_{w \to +\infty} \ln(w) - \ln(1) =$$

$$= \lim_{w \to +\infty} \ln(w) = +\infty$$

caso $\boxed{\alpha \neq 1}$

$$\lim_{w \to +\infty} \int_1^{\cancel{+\infty}\, w} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\cancel{\alpha}\, 1-\alpha}\, x^{1-\alpha} \Big|_1^{w} =$$

$$= \lim_{w \to +\infty} \left(\frac{w^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right)$$

$$\lim_{w \to +\infty} = +\infty \quad \text{se} \quad 1-\alpha \geq 0$$

$$\alpha \leq 1$$

$$\lim_{w \to +\infty} = \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{se} \quad 1-\alpha < 0$$

$$\alpha > 1$$

CRITERI di INTEGRABILITÀ all'INFINITO

Siano $f, g : [a; +\infty) \to \mathbb{R}$ continue

Ⓐ CONFRONTO

$0 \leq f(x) \leq g(x)$ in $[a, +\infty) \Rightarrow$

g e' integrabile $\Rightarrow$ f e' integrabile

f non e' integrabile $\Rightarrow$ g non e' int.

"Dim" $\to$ per MONOTONIA!

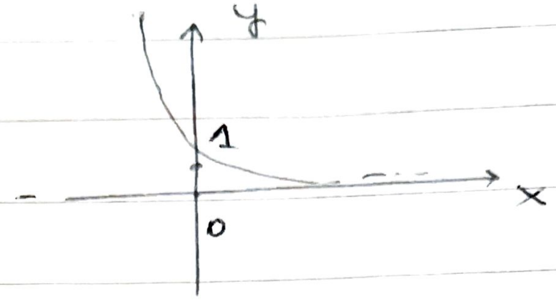
Ⓑ CONFRONTO ASINTOTICO

Se $f > 0$, $g > 0$ e $f \sim g$ per $x \to +\infty \Rightarrow$

f integrabile $\Leftrightarrow$ g integrabile

Esempi

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$



Scriviamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

in $[1, +\infty)$ $\quad x^{+2} > x$

$$\Rightarrow e^{-x^2} < e^{-x}$$

$$[f(x) < g(x)]$$

ma

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \left[-e^{-\omega} + \frac{1}{e} \right] = \frac{1}{e}$$

per CONFRONTO $\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ e' CONVERGENTE

Criteri di integrabilità all'infinito

Esempio 2 – CONFRONTO ASINTOTICO

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+x+1}\,dx$$

$$f(x) \sim \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} = g(x) \quad \text{per } x \to +\infty$$

$\frac{1}{x^2}$ è integrabile (per esercizio – integrali su intervalli illimitati $\Rightarrow \alpha < 1$)

$\alpha = -2$

Esempio 3 – CONFRONTO ASINTOTICO

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$g(x)$

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} \quad \text{per } x \to +\infty$$

Sempre per l'esercizio di cui sopra, $f(x)$ non è integrabile

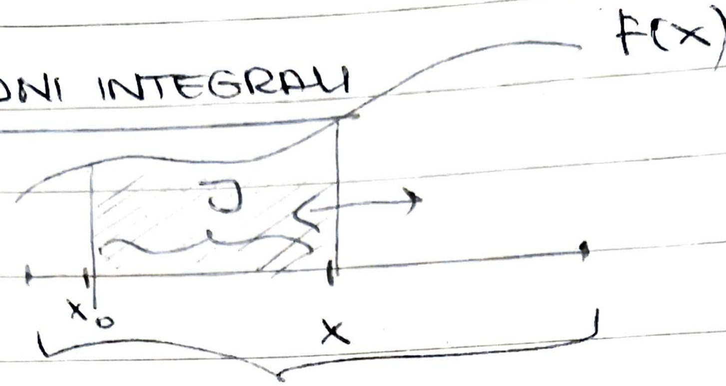
REMIND

Per funzioni di segno qualunque si ha ancora:

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \text{ convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) \text{ convergente}$$

Se $|f(x)|$ e' integrabile in $[a, +\infty)$, $f(x)$ e' assolutamente integrabile in $[a, +\infty)$

FUNZIONI INTEGRALI



I $\qquad\qquad$ $J \subset I$

f continua su I

Al variare della posizione x cambia il valore dell'integrale di f su J.

Si dice FUNZIONE INTEGRALE

$$\cancel{F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

t (variabile muta - variabile di integrazione) varia sempre fra x_0 e x

Quindi

Ⓐ → INTEGRALE DEFINITO di f su $[a,b]$ =

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

E' UN NUMERO

(definito come limite di somme)

Ⓑ → la FUNZIONE INTEGRALE di f

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

e' (appunto!) una FUNZIONE

Al variare di x associa un numero diverso!

Ⓒ → INTEGRALE INDEFINITO di f

$$\int f(x)\,dx$$

e' un SIMBOLO che denota un insieme di funzioni ⇒ l'insieme di TUTTE le primitive di f, ossia $G(x) + c$, con $G'(x) = f(x)$

SECONDO TEOREMA del CALCOLO INTEGRALE

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione definita e continua sull' intervallo I e sia

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

la sua funzione integrale, con x_0 fissato e $x_0 \in I$.

Allora la funzione F e' DERIVABILE (quindi anche CONTINUA!) su tutto I e

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in I$$

CONSEGUENZE

① F e' derivabile con continuità perchè $F' = f$ ma f continua!

② Se f e' derivabile con continuità, allora anche F' e' derivabile con continuità (perchè e' f!).
Perciò F e' DUE VOLTE derivabile

con continuità!

$\Rightarrow$ la funzione INTEGRALE ha sempre un grado di REGOLARITÀ in più rispetto alla funzione integranda:

se f continua $\Rightarrow$ F ha derivata continua

se f ha derivata continua $\Rightarrow$ F ha derivata SECONDA continua.

③ Ogni funzione CONTINUA su I ha su I una primitiva: la sua funzione integrale!

$$\int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c$$

[REMIND:
se f è derivabile in un punto x_0, allora f è continua in x_0.
se una funzione è discontinua in x_0 non può essere derivabile in x_0.
VICEVERSA! se f è continua in x_0 NON NECESSARIAMENTE è derivabile in x_0!]

Dimostrazione

consideriamo il rapporto incrementale di F

$$\frac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x) \right) =$$ e sfruttiamo l'additività dell'integrale

$$= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$$

Usiamo il Teorema della MEDIA relativamente all'intervallo di estremi x e $x+h$:

$$\frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t)\,dt = f(c_h) \qquad c_h \in [x; x+h]$$

Uguagliando inizio e fine abbiamo trovato che

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c_h) \qquad c_h \in [x; x+h]$$

Se $h \to 0 \Rightarrow c_h \to x$

Usando la continuità di f si ha

$$\lim_{h\to 0} f(c_h) = f\left(\lim_{h\to 0} c_h\right) = f(x)$$

Quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = F'(x) = f(x) \qquad \square$$

ESTENSIONE del RISULTATO:

Se $f(t)$ (integranda) non e' continua su tutto I ma ho delle discontinuità a SALTO oppure e' ILLIMITATA ma il suo integrale generalizzato e' CONVERGENTE si può dimostrare che $F(x)$ e' ALMENO CONTINUA su tutto I.

In tutti i punti in cui $f(t)$ e' continua, $F(x)$ e' derivabile e $F'(x) = f(x)$