NUMERI COMPLESSI $\Rightarrow$ i = unità immaginaria

$i^2 = -1$!! Assurdità matematica?

↓ dall'immaginario

al concreto !!

TEORIE MATEMATICHE:

- → Autovalori di una matrice $n \times n$
- → Equazione diff. lineare di ordine sup al primo

FISICHE:

- → fluidodinamica
- → fisica quantistica
- → teoria dei segnali
- → Ing. elettrica & elettronica

DARE GENERALITÀ al CAMPO NUMERICO.

Infatti

a^b è sempre definita in $\mathbb{R}$?

($\mathbb{R}$ = campo Reale)

$$\exists\, a^b \Leftrightarrow \quad a > 0 \quad \forall b$$

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} b \text{ intero} \\ b = \frac{m}{n} \quad \text{con } n \text{ dispari!} \end{cases}$$

ES

$2^{1/2} \Rightarrow \sqrt{2}$ ok!

$-2^{1/2} \Rightarrow \sqrt{-2}$ $\nexists$!!

$$-8^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{ok!}$$

Definizione di $\mathbb{C}$ lo costruiamo!

$(a,b) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow (a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R})$

Definiamo operazioni di SOMMA e PRODOTTO con QUESTE REGOLE:

a) $(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$

b) $(a,b) \cdot (c,d) = \cancel{(ab = cd}$

$(ac - bd,\ ad + bc)$

OSS:

$\forall (a,b)$

1 → $(a,b) + (0,0) = (a,b)$

↓

Elemento NEUTRO per ciascuna delle due operazioni

↑

2 → $(a,b) \cdot (1,0) = (a-0,\ 0+b) =$

$= (a,b)$

$$(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b)$$

$$= (0, 0)$$

$\boxed{\text{OPPOSTO}}$

Se $(a, b) \neq (0,0)$

$\boxed{\text{RECIPROCO}}$

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2} \right) =$$

$$= (1, 0)$$

$\mathbb{R}^2$ + a) e b) e' un campo che chiameremo

$\boxed{\text{CAMPO}}$ dei NUMERI COMPLESSI $\mathbb{C}$

(*) $\mathbb{C}_0$ sottocampo di $\mathbb{C}$ formato dalle coppie del tipo $(a,0)$

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0+0)=$$
$$=(a+b,0)$$

$$(a,0)\cdot(b,0)=(a\cdot b-0,0+0)=$$
$$=(ab,0)$$

somma e prodotto rimangono interne al campo!!

$\mathbb{C}_0$ può essere ORDINATO

$$(a,0)<(b,0) \Leftrightarrow a<b$$

Allora mettiamo in corrispondenza BIUNIVOCA (cioè, identifichiamo!)

$$(a,0) \leftrightarrow a$$

$$\boxed{\mathbb{C}_0 = \mathbb{R}}$$

$\mathbb{R}$ è un sottocampo di $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$

In questo senso $\mathbb{C}$ è un ampliamento di $\mathbb{R}$

CONSIDERIAMO ora

$\circledast$ $(0,1)$ (Attenzione $(0,1) \in \mathbb{C}$, ma $(0,1) \notin \mathbb{C}_0$)

$$(0,1)\cdot(0,1) = (0-1,\ 0) = (-1,0) = -1$$

(per coms p con $\mathbb{C}_0$)

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(0,1)^2 = -1}$$

Il suo quadrato coincide con il NUMERO REALE -1

$(0,1)$ viene indicata con la lettera i e viene chiamata UNITA' IMMAGINARIA

$(1,0) = 1 \in \mathbb{R}$

$(0,1) = i \in \mathbb{C}$

FORMA ALGEBRICA dei NUMERI COMPLESSI

(ci serve per semplificare la notazione!)

osservando che:

Attenzione!! Questo NON è il neutro della moltiplic!!

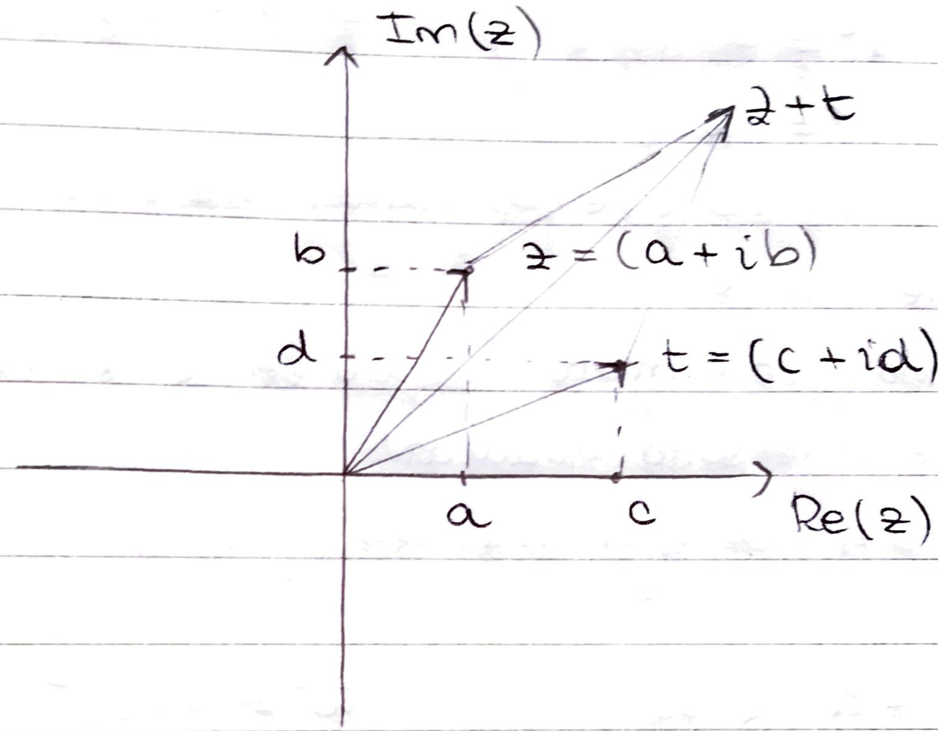
$$(a,b) = (a,0) + (0,1)\cdot(b,0)$$

$$= (a,0) + (0\cdot b - 1\cdot 0,\ 0\cdot 0 + 1\cdot b) =$$

$$= (a,0) + (0,b) = (a,b) \quad \text{ok}$$

PIANO COMPLESSO (o PIANO di GAUSS)

Rappresentiamo i numeri complessi in un piano cartesiano.



Il numero è individuato dalle due coordinate.

la somma di due numeri è la somma delle coordinate ⇒ calcolo vettoriale = regola del parallelog.

$(a+c, i(b+d))$

(così come la differenza!)

CONIUGATO e MODULO

$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$ $\quad \bar{z}$ coniugato di z

$z + \bar{z} = 2a = 2\,Re(z)$

$z - \bar{z} = 2ib = \cancel{2i\,Im(z)} = 2\,Im(z)$

PROPRIETÀ (da dimostrare come esercizio)

$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (coniugato della somma è la somma dei coniugati)

$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ coniugato del prodotto è il prodotto dei coniug.

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ (questo come si calcola? è il reciproco)

$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 \cancel{-iab} + \cancel{iab} + b^2 =$

$= a^2 + b^2 \geq 0$

Si chiama

MODULO di z : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Se z è reale $|z| = |a|$ = valore ASSOLUTO.

PROPRIETA' del MODULO:

a) $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $|z| = |\bar{z}|$

c) $|Re(z)| \leq |z|$

$|Im(z)| \leq |z|$

$|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$ triangolare

d) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ triangolare

e) $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Cosa rappresenta geom. il modulo?

$|z|$ è la lunghezza del segmento individuato dal numero complesso z

(o distanza dall'origine)

$|z_1 + z_2| =$ somma

$|z_1 - z_2| =$ differenza (distanza fra due punti)

RAPPORTO fra 2 NUMERI COMPLESSI

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} \cdot \frac{(c-id)}{(c-id)} =$$

$$= \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{(a+ib)(c-id)}{|c+id|^2}$$

$$= \frac{ac - iad + ibc + bd}{c^2+d^2} =$$

$$= \boxed{\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)}$$

E' un modo per riscriverlo...