INTEGRAZIONI delle FUNZIONI GONIOMETRICHE

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx$$

$\sin x = t$

$\dfrac{d\sin x}{dx} = \dfrac{dt}{dx}$

Si procede per SOSTITUZIONE

$\cos x = \dfrac{dt}{dx}$

$\cos x\,dx = dt$

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx$$

$\cos x = t$

$-\sin x\,dx = dt$

Esempio

$$\int (\sin x)^3(\cos x)^2\,dx$$

$\sin x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$\underbrace{\sin x}_{\sin x} \cdot \underbrace{(1-\cos^2 x)\cos^2 x}_{f(\cos x)}$

$\cos x = t$

$-\sin x\,dx = dt$

$$\Rightarrow +\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x \, dx =$$

$$-\int (1-t^2)\, t^2 \, dt =$$

$$-\int t^2 - t^4 \, dt = \int t^4 - t^2 \, dt$$

$$= \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3$$

$$= \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x$$

FUNZIONI RAZIONALI di $\sin x$ e $\cos x$

Si esegue con la seguente sostituzione:

$$t = tg \frac{x}{2} \qquad x = 2 \operatorname{arctg} t \qquad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$e \quad \begin{cases} \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{se } t = tg \frac{x}{2}$$

cioè posso sostituire queste espressioni di $\cos x$, $\sin x$ ...

In generale è un calcolo molto laborioso...

$\Rightarrow$ se in $\int (\sin x)^n (\cos x)^m \, dx$ sia n che m sono PARI,

allora meglio usare le formule trigonometriche per abbassare il grado:

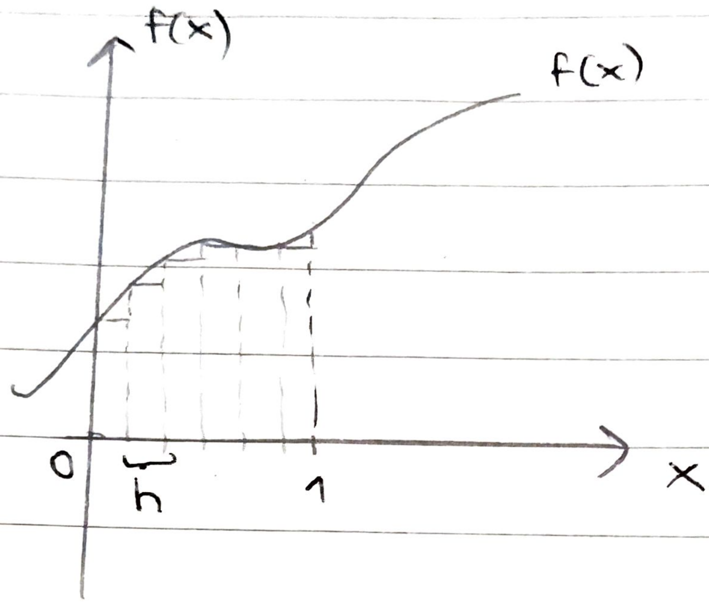
$$(\cos x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$(\sin x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

ESERCIZIO : Calcolare $\int (\sin x)^2 (\cos x)^4 \, dx$

Integrale DEFINITO

• Integrale come LIMITE di SOMME



Divido [a,b] in questo caso [0,1] in un certo numero n di sottointervalli

h = ampiezza del sottointervallo

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\text{Area} = S_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{base}} \cdot \underbrace{f\left(\frac{i}{n}\right)}_{\text{altezza}}$$

Invece di prendere l'estremo, si potrebbe prendere un qualunque punto arbitrario

$$\xi_j \in [x_{i-1}, x_i]$$

dove il generico punto $x_i = a + ih$

$h = \frac{b-a}{n} \qquad i = 0, \dots, n$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{base}} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{altezza}} =$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

la base di ciascuno è proprio questa!

$$x_i - x_{i-1} = h = \frac{b-a}{n}$$

TEOREMA

$\forall$ funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$\exists$ finito $\lim_{n \to \infty} S_n$

Tale limite è INDIPENDENTE dalla scelta dei punti ξ_i

IL LIMITE prende il Nome di INTEGRALE di f su $[a, b]$ e si scrive:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)$$

$\int$ simbolo di integrale è la deformazione di Σ, simbolo di SOMMA

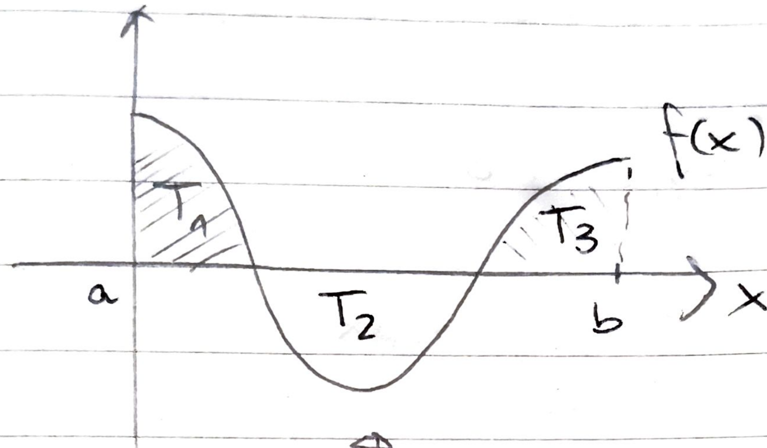
OSSERVAZIONE: l'integrale DEFINITO è un NUMERO, e non un (insieme infinito di funzioni) come era l'integrale INDEFINITO.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

$$S_n \to \int_a^b f(x)\,dx = \text{AREA del TRAPEZOIDE}$$

E' il calcolo integrale che permette di dare senso all'idea di AREA di una FIGURA PIANA GENERALE.

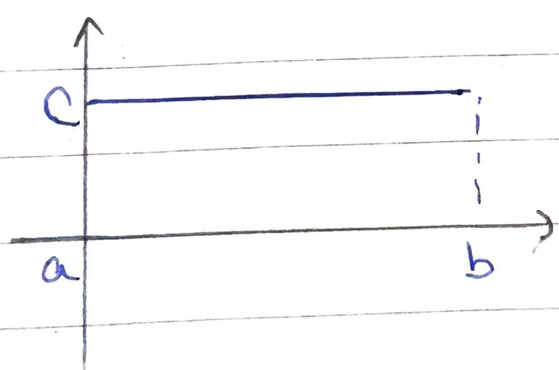
① **OSS**: l'integrale rappresenta una somma di AREE con SEGNO



qui la f(x) cambia segno ⟹ area negativa

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area}(T_1) - \text{area}(T_2) + \text{area}(T_3)$$

② **OSS**: caso "elementare":



$f(x) = c$, costante

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c \cdot \int_a^b dx = c(b-a)$$

PROPRIETA' dell'INTEGRALE

① **Linearità** se α e β costanti,

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx =$$

$$\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

② ~~Additività~~ convenzione. se $a < b$

$$\int_b^a f(x)\,dx = - \int_a^b f(x)\,dx$$

③ **Additività**. se $a \leq r \leq b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^r f(x)\,dx + \int_r^b f(x)\,dx$$

④ Monotonia

$$f \geq 0 \text{ in } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

$$f \geq g \text{ in } [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

In particolare

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

TEOREMA della MEDIA

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua.

Allora $\exists\, c \in [a, b] :\Rightarrow$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

Dim:

Se f continua in $[a, b] \Rightarrow f$ ha minimo $(= m)$ e massimo $(= M)$.

Dalla proprietà di monotonia si ha che

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b m\,dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b M\,dx = M$$

Quindi $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ è compreso tra m e M.

Per la proprietà dei valori intermedi delle funzioni continue, esso è uguale a $f(c)$ per qualche $c \in [a, b]$

TEOREMA dei VALORI INTERMEDI: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia $f(a) < f(b)$ (o viceversa). Allora la funzione assume ogni valore compreso fra $f(a)$ e $f(b)$. ovvero $\forall\, y_0$ $f(a) < y_0 < f(b)$ $\exists\, x_0 \in [a,b] : f(x_0) = y_0$

Ma, operativamente come si calcola l'integrale definito ?" Poco cambia rispetto a prima ...

TEOREMA FONDAMENTALE del CALCOLO INTEGRALE

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è CONTINUA, e $G(x)$ è una sua PRIMITIVA su $[a,b]$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

$G(b) - G(a)$ si indica comunemente anche con $\left[G(x)\right]_a^b$ o $G(x)\Big|_a^b$

Esempio

$$\int_a^b x^2\,dx$$

$a = 0,\ b = 1$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

L'INTEGRALE DEF. è UN NUMERO !!

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

l'integrale indefinito è un INSIEME INFINITO di FUNZIONI (tutte le primitive!)