

III prova parziale - B

Esercizio 1 - 4 punti Si calcoli il seguente integrale definito.

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2} dx$$

Esercizio 2 - 4 punti Calcolare l'area della regione piana limitata compresa tra l'asse delle ascisse e la funzione

$$f(x) = x^2 - 2x, \text{ in } 0 < x < 3$$

Esercizio 3 - 3 punti Stabilire se il seguente integrale improprio converge

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-4x^2}}{x} dx$$

Esercizio 4 - 5 punti Assegnato il vettore $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e la matrice $A = \begin{bmatrix} a & a^2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$,

- calcolare il vettore $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ (1 punto);
- determinare per quale valore del parametro a \mathbf{y} è perpendicolare a \mathbf{x} (1 punto);
- determinare per quale valore del parametro a la matrice A risulta invertibile (2 punti);
- per $a = 1$ calcolare $\det(A^{-1})$ e $\det(A^3)$ (1 punto).

Esercizio 5 - 5 punti Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -\beta^2 & -6 \end{bmatrix}$; e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta \\ 2 \end{bmatrix}$;

- lo si discuta al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ (2 punti);
- lo si risolva per $\beta = 1$ (2 punti);
- si discuta $A\mathbf{x} = 0$ (senza risolverlo) (1 punto).

Esercizio 6- 3 punti Stabilire per quale valore del parametro k i seguenti vettori sono linearmente indipendenti.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ k \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -k \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ k^2 \\ 2 \end{bmatrix};$$

Domanda 1 - 3 punti Enunciare e dimostrare il Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

Domanda 2 - 3 punti Definire autovalori e autovettori di una matrice A di ordine n .