Analisi matematica

Esercizi di Algebra Lineare: Parte I.

March 15, 2016

1. **Calcolo vettoriale in $\mathbb{R}^2$.** Dati:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix};\ \alpha_1 = 1;\ \alpha_2 = -2;\ \alpha_3 = 0$$

calcolare

$$\mathbf{u}+\mathbf{v};\ \ \alpha_2\mathbf{v};\ \ \mathbf{u}-\mathbf{z};\ \ \alpha_1\mathbf{u}+\alpha_2\mathbf{v}+\alpha_3\mathbf{z};\ \ \alpha_2(\mathbf{u}-\mathbf{z});\ \ \mathbf{uv};\ \ \mathbf{zu};\ \ \alpha_2\mathbf{zuv};\ \ |\mathbf{u}|$$
$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|;\ \ |\mathbf{v}-\mathbf{z}|;\ \ vers(\mathbf{u});\ \ vers(\alpha_1\mathbf{v});\ \ vers(\alpha_2\mathbf{z}+\mathbf{u})$$

SOLUZIONI:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix};\alpha_2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix};\mathbf{u}-\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix};\alpha_1\mathbf{u}+\alpha_2\mathbf{v}+\alpha_3\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix};\alpha_2(\mathbf{u}-\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix};\\ \mathbf{uv} &= -5; \mathbf{zu} = 7; \alpha_2\mathbf{zuv} = \begin{bmatrix} 70 \\ 0 \end{bmatrix}; |\mathbf{u}| = \sqrt{2};\end{aligned}$$

2. **Calcolo vettoriale in $\mathbb{R}^3$.** Dati:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ \alpha_1 = 0;\ \alpha_2 = 1;\ \alpha_3 = 2$$

calcolare

$$\mathbf{u}+\mathbf{v};\alpha_2\mathbf{v};\mathbf{u}-\mathbf{z};\alpha_1\mathbf{u}+\alpha_2\mathbf{v}+\alpha_3\mathbf{z};\alpha_2(\mathbf{u}-\mathbf{z});\mathbf{uv};\mathbf{zu};\alpha_2\mathbf{zuv}$$
$$|\mathbf{z}|;|-8\mathbf{z}|;|\mathbf{u}-\alpha_3\mathbf{z}|;|\mathbf{u}-\mathbf{z}|$$

SOLUZIONI:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};\alpha_2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\mathbf{u}-\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix};\alpha_1\mathbf{u}+\alpha_2\mathbf{v}+\alpha_3\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix};\\ \alpha_2(\mathbf{u}-\mathbf{z}) &= \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{uv} = -5; \mathbf{zu} = 7; \alpha_2\mathbf{zuv} = \begin{bmatrix} -35 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix};\\ &|\mathbf{z}| = \sqrt{65}; |-8\mathbf{z}| = 8\sqrt{65}; |\mathbf{u}-\alpha_3\mathbf{z}| = 3\sqrt{26}; |\mathbf{u}-\mathbf{z}| = \sqrt{53};\end{aligned}$$

3. **Calcolo vettoriale in $\mathbb{R}^4$.** Dati:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix};\ \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};\ \alpha_1 = 2;\ \alpha_2 = 0;\ \alpha_3 = 4$$

calcolare

$$\mathbf{u}+\mathbf{v};\alpha_2\mathbf{v};\mathbf{u}-\mathbf{z};\alpha_1\mathbf{u}+\alpha_2\mathbf{v}+\alpha_3\mathbf{z};\alpha_2\left(\mathbf{u}-\mathbf{z}\right);\mathbf{uv};\mathbf{zu};\alpha_2\mathbf{zuv};\left|\alpha_2\left(\mathbf{u}-\mathbf{z}\right)\right|$$

SOLUZIONI:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= \begin{bmatrix}3\\0\\1\\4\end{bmatrix};\alpha_2\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix};\mathbf{u}-\mathbf{z}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\0\end{bmatrix};\alpha_1\mathbf{u}+\alpha_2\mathbf{v}+\alpha_3\mathbf{z}=\begin{bmatrix}16\\8\\0\\6\end{bmatrix};\alpha_2\left(\mathbf{u}-\mathbf{z}\right)=\mathbf{0};\\ \mathbf{uv} &= 5;\mathbf{zu}=7;\alpha_2\mathbf{zuv}=\mathbf{0};\left|\alpha_2\left(\mathbf{u}-\mathbf{z}\right)\right|=0\end{aligned}$$

4. Verificare, usando la definizione, se

   (a) i vettori $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

   (b) i vettori $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}\right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

   (c) i vettori $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

   (d) i vettori $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

   (e) i vettori $\left\{\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

   (f) i vettori $\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}\right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

   (g) i vettori $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ sono linearmente indipendenti (in caso contrario esprimere uno di essi come combinazione lineare dei restanti).

SOLUTIONI: caso a) consideriamo una generica combinazione lineare di coefficienti $\alpha_1\in\mathbb{R}$ e $\alpha_2\in\mathbb{R}$ dei vettori dati e iponiamola uguale al vettore nullo

$$\alpha_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_1-\alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

l'uguaglianza trai il vettore combinazione lineare e il vettore nullo impone:

$$\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2=0\\\alpha_1-\alpha_2=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}3\alpha_1=0\\\alpha_1=\alpha_2\end{cases}$$

dalla prima equazione abbiamo che $\alpha_1=0$, e dalla seconda otteniamo che $\alpha_2=0$. Questo significa che la combinazione lineare restituisce il vettore nullo se e solo se $\alpha_1=\alpha_2=0$. Concludiamo che i vettori sono linearmente indipendenti. b) consideriamo una generica combinazione lineare di coefficienti $\alpha_1\in\mathbb{R}$ e $\alpha_2\in\mathbb{R}$ dei vettori dati e iponiamola uguale al vettore nullo

$$\alpha_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha_1-\frac{\alpha_2}{2}\\\alpha_1-\frac{\alpha_2}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\tag{1}$$

l'uguaglianza trai il vettore combinazione lineare e il vettore nullo impone:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{2} = 0 \\ \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{4} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4\alpha_1 = \alpha_2 \\ 4\alpha_1 = \alpha_2 \end{cases}$$

la prima e la seconda equazione sono soddisfatte fissando α_1 qualsiasi (quindi anche diverso da zero) e $\alpha_2 = 4\alpha_1$. Concludiamo che i vettori sono linearmente dipendenti. Scegliendo $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 = 4\alpha_1$, abbiamo dall'equazione (1) che

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

c) i vettori sono linearmente dipendenti in quanto in $\mathbb{R}^2$ non è possibile avere tre vettori tra loro linearmente indipendenti (dati due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^2$, posso esprimere ogni altro vettore di $\mathbb{R}^2$ come combinazione lineare di questi due vettori dati). Imponendo

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

abbiamo

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = \frac{4}{3}\alpha_3 \\ \alpha_1 = -\frac{5}{3}\alpha_3 \end{cases}$$

Possiamo fissare $\alpha_3 = 1$ e otteniamo

$$-\frac{5}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{5}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. Per ogni insime di vettori B_i , $i = 1, ..., 10$, che segue, individuare il più grande sottoinsieme composto

esclusivamente da vettori linearmente indipendenti (indicarli tutti se sono più di uno):

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \\
B_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \right\} \\
B_3 &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
B_4 &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \\
B_5 &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
B_6 &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} \\
B_7 &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\
B_8 &= \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
B_9 &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \\
B_{10} &= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

SOLUZIONI:

$$
\begin{gathered}
B_1 \to B_1 \\
B_2 \to \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}
\end{gathered}
$$

I vettori di B_3, B_4 e B_5 sono a due a due indipendenti, quindi prendo tutte le coppie possibili.

$$
\begin{gathered}
B_6 \to B_6 \\
B_7 \to B_7
\end{gathered}
$$

I vettori di B_8, B_9 e B_{10} sono a due a due indipendenti, quindi prendo tutte le coppie possibili.

6. Esprimere, dove possibile, il vettore $\mathbf{u}$ come combinazione lineare dei vettori in B (qualora non fosse possibile,

spiegarne il perché e darne evienza grafica):

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} ----> B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

SOLUZIONI: i vettori

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

sono linearmente indipendenti, segue che posso esprimere ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ come combinazione lineare di questi due vettori. In particolare

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 \end{bmatrix}$$

scegliendo $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ e $\alpha_2 = -\frac{1}{3}$, otteniamo l'identità cercata. Procedere in modo analogo per i restanti casi.

7. Si determinino, se esistono,

(a) i coefficienti c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ possa essere scritto come come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ (Vettori della base canonica); SOLUZIONE: $c_1 = 3$, $c_2 = -5$, $c_3 = 6$.

(b) i coefficienti c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ possa essere scritto come come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^3$ (dove $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ sono i vettori della base canonica); SOLUZIONE: $c_1 = \frac{17}{2}; c_2 = -\frac{11}{2}$, $c_3 = 6$.

(c) i coefficienti c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ possa essere scritto come come combinazione lineare dei vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE: $c_1 = \frac{7}{5}; c_2 = \frac{4}{5}$, $c_3 = -6$.

(d) i coefficienti c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ possa essere scritto come come combinazione lineare dei vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE: $c_1 = 3; c_2 = 5$, $c_3 = 0$.

8. Si dica se

(a) il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ (Motivare tramite rappresentazione grafica). SOLUZIONE: i due vettori sono linearmente indipendenti, segue che ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ può essere ottenuto come combinazione lineare dei due vettori. Il vettore dato non fa eccezione.

(b) il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ (Motivare tramite rappresentazione grafica). SOLUZIONE: No.

(c) il vettore $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (Motivare tramite rappresentazione grafica). SOLUZIONE: Si.

9. Indicare se $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, dove x_1, y_1, $z_1 \in \mathbb{R}$ e

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, indicare una base di tale sottospazio e specificarne la dimensione. SOLUZIONE: Ogni vettore

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -3x_1 \end{bmatrix}$$

con $x_1 \in \mathbb{R}$ assicura (2). L'insieme di tutti i vettori $[x_1, -2x_1, -3x_1]$ costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1. Un base di tale sottospazio è $[1, -2, -3]$

10. Indicare se $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, dove x_1, y_1, $z_1 \in \mathbb{R}$ e

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, indicare una base di tale sottospazio e specificarne la dimensione. SOLUZIONE: procedere come al punto precedente.

11. Indicare se $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, dove x_1, $y_1 \in \mathbb{R}$ e

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, indicare una base di tale sottospazio e specificarne la dimensione. SOLUZIONE: procedere come al punto precedente.

12. Indicare se $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, dove x_1, $y_1 \in \mathbb{R}$ e

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$, indicare una base di tale sottospazio e specificarne la dimensione. SOLUZIONE: procedere come al punto precedente.

13. Si dica, giustificando la risposta, se:

   (a) i vettori $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ costituiscono una base in $\mathbb{R}^2$; SOLUZIONE: Vero, i due vettori sono linearmente indipendenti e generano tutto $\mathbb{R}^2$. Segue che essi sono una base di $\mathbb{R}^2$.

   (b) i vettori $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ costituiscono una base in $\mathbb{R}^3$; SOLUZIONE: No, una base di $\mathbb{R}^3$ è composta da tre vettori linearmente indipendenti.

14. Dopo aver verificato, in base alla definizione, che i tre vettori:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, si esprima il vettore $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

15. Assegnati i vettori: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, si determinino due numeri a e b tali che:

$$a\mathbf{u}+b\mathbf{v} = -\mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^2, \ \left(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2 \text{ sono i vettori della base canonica (vettori fondamentali) di } \mathbb{R}^3\right)$$

SOLUZIONE:

$$a\mathbf{u}+b\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2b \\ a-b \\ -a+3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^2$$

segue che $b = -\frac{1}{2}$ e $a = \frac{3}{2}$.

16. Assegnati i vettori: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ed $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ 6 \\ b \\ -2 \end{bmatrix}$ si determini, per quali valori dei parametri reali a e b:

    (a) $\mathbf{u}$ è proporzionale a $\mathbf{v}$;

    (b) $\mathbf{u}$ è ortogonale a $\mathbf{v}$;

    SOLUZIONE: a) Imponendo le condizioni per la proporzionalità, ossia $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$, abbiamo che e per l'ortogonalità otteniamo

    $$\begin{cases} 2 = \lambda a \\ -3 = \lambda 6 \\ 0 = \lambda b \\ 1 = -2\lambda \end{cases}$$

    da cui otteniamo $b = 0$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ e $a = -4$. b) Imponendo la condizioni di ortogonalità tra i due vettori abbiamo:

    $$\mathbf{uv} = 2a - 20 = 0$$

    che implica $a = 10$ e b qualsiasi numero reale.

17. Assegnate le matrici

    $$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

    si calcolino, se possibile: AB, BA, AB^T, $A+B$.

    SOLUZIONE:

    $$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 8 & 3 & -12 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 2 \\ 13 & 11 & -16 & 1 \\ 6 & 4 & -8 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

    AB^T non si può fare!!! $A+B$ non si può fare!!!

18. Date le matrici

    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    si determini per quali valori di a e b risulta: $AB^T = I_2$ (I_2 è la matrice identità 2×2).SOLUZIONE:

    $$AB^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b-1 \\ 1+2a & b \end{bmatrix}$$

    imponendo

    $$\begin{bmatrix} 1 & b-1 \\ 1+2a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    otteniamo $b = 1$ e $a = -\frac{1}{2}$.

19. Assegnato il vettore $\mathbf{u} = [-1, 3, -2]$,

(a) si calcoli il vettore

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \begin{bmatrix} -3 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \\ -a & a & 1 \end{bmatrix}, \, a \in \mathbb{R}$$

(b) si determini, per quale valore del parametro reale a, $\mathbf{v}$ è otogonale ad $\mathbf{u}$. SOLUZIONE:

$$\mathbf{u} \begin{bmatrix} -3 & 1 & a \\ 1 & a & 2 \\ -a & a & 1 \end{bmatrix} = [2 + 2a, a - 1, 4 - a]$$

imponendo la condizione di ortogonalità

$$\mathbf{vu} = 0$$

otteniamo

$$a = \frac{13}{3}$$

20. Individuare lo spazio (o sottospazio) vettoriale generato dai vettori colonna di ciascuna delle seguenti matrici:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

SOLUZIONE: 1) tutte le possibili coppie di vettori colonna di A sono tra loro linearmente indipendenti e costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$. 2) i due vettori colonna di A sono uno proporzionale all'altro (sono linearmente dipendenti), tutte le loro possibili combinazioni lineari costituisce un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 2 dato da $V = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. 2) i primi due vettori colonna di A sono tra loro linearmente indipendenti, mentre il terzo può essere ottenuto dal secondo sottratto il primo. Segue che lo spazio generato da tutte le possibili combinazioni lineari dei vettori colonna di A è un sottospazio di dimension 2 di $\mathbb{R}^2$ dato da $V = \left\{ \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$. 3) La prima, la seconda e la quarta colonna di A sono tre vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$, segue che lo spazio vettoriale generato da ogni combinazione lineare di queste tre colonne è $\mathbb{R}^3$.