Università "Carlo Cattaneo"

Ingegneria gestionale

Analisi matematica

a.a. 2018/2019

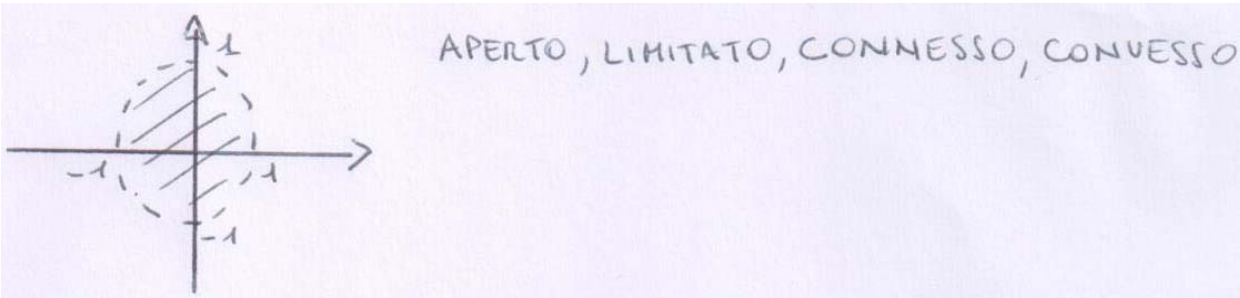
FUNZIONI IN DUE VARIABILI

ESERCIZI CON SOLUZIONE

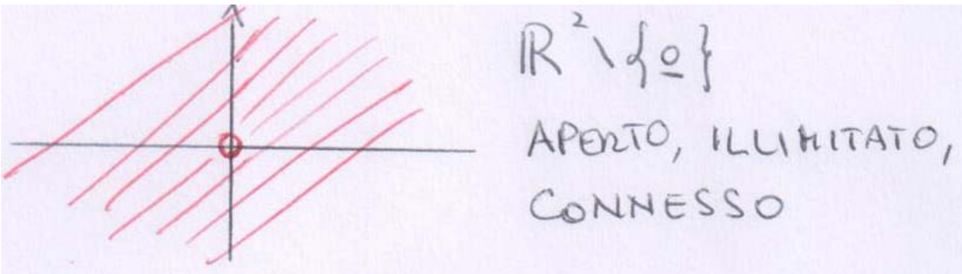
1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni e rappresentarlo sul piano cartesiano:

a) $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$
b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^4)$
c) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^4}$
d) $f(x,y) = \sqrt{\ln(x^2 + y^2)}$
e) $f(x,y) = \ln(xy^2 + x^2y)$

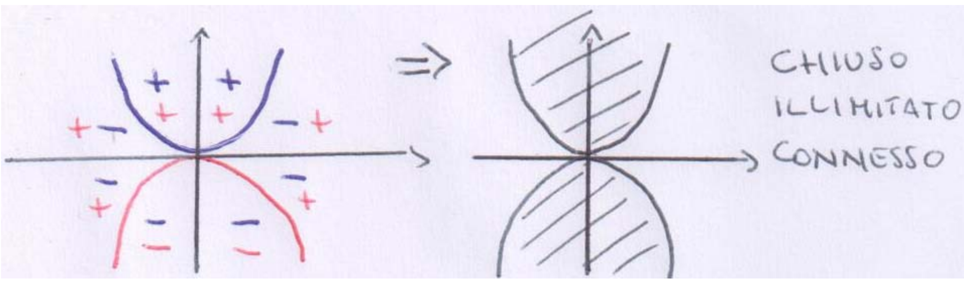
a) $x^2 + y^2 < 1$



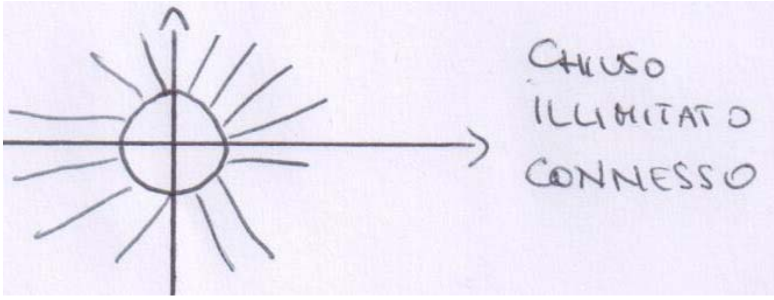
b) $x^2 + y^4 > 0$ verificata ovunque tranne che in $(0,0)$



c) $y^2 - x^4 \geq 0$, $(y - x^2)(y + x^2) \geq 0$
$y \geq x^4$ o $y \geq -x^2$

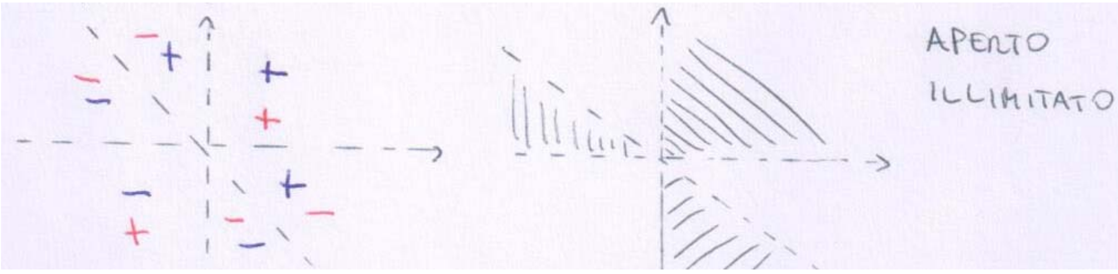


d) $\ln(x^2 + y^2) \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq 1$



e) $xy^2 + x^2y > 0$, $xy(y + x) > 0$

$\boldsymbol{xy > 0}$ o $\boldsymbol{y > -x}$



2. Determinare le curve di livello k delle seguenti funzioni:

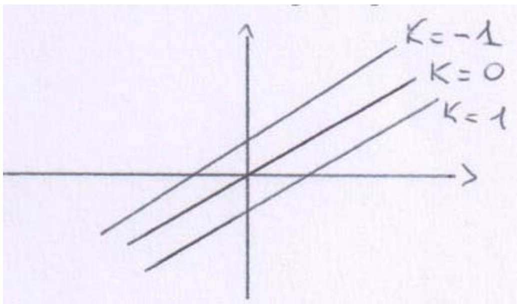
a) $f(x, y) = 2x - 5y$

b) $f(x, y) = x^2y$

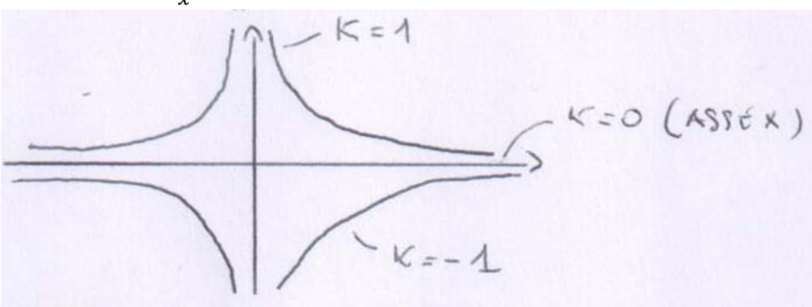
c) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{y+1}}$

d) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

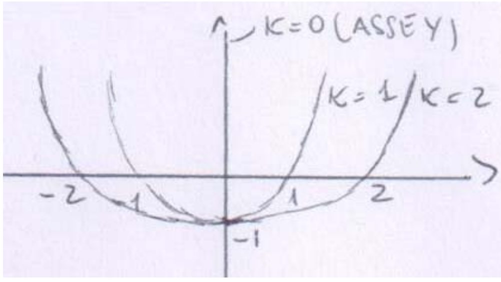
a) $2x - 5y = k$, $y = \frac{2}{5}x - \frac{k}{5}$



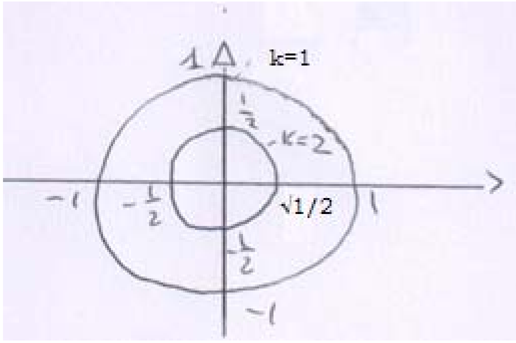
b) $x^2y = k$, $y = \frac{k}{x^2}$ per $x \neq 0$



c) $\sqrt{\frac{x^2}{y+1}} = k\ (k \geq 0)$, $\frac{x^2}{y+1} = k^2$, $y = \frac{x^2}{k^2} - 1$ se $k \neq 0$, $x = 0$ se $k = 0$



d) $\frac{1}{x^2+y^2} = k$, $x^2 + y^2 = \frac{1}{k}$ $(k \neq 0)$



3. Calcolare i seguenti limiti in due variabili:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2+1}{x^2+y^2}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(x^2y^2+1)}{xy}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4}$

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2+1}{x^2+y^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(x^2y^2+1)}{xy} = \frac{0}{0}$
ponendo $xy = t$, si ha $xy \to 0 \cdot 1, t \to 0$ e si ottiene
$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(t^2+1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t} = 0$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$
calcolando lungo la direzione $y = x$ si ha $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$

calcolandolo lungo la direzione $y = 2x$ si ha $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{5x^2} = 0$
dunque il limite dato non esiste.

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4} = \frac{0}{0}$
calcolandolo lungo la direzione $y = 0$ si ha $\lim_{x\to 0} 0 = 0$
calcolandolo lungo la direzione $x = 0$ si ha $\lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4} = 1$
dunque il limite dato non esiste.

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$
calcolandolo lungo la direzione $y = x$ si ha $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{2x^2} = \frac{0}{0}$, poiché $\sin x^2$ è asintotico a x^2 per $x \to 0$, si ha: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$
calcolandolo lungo la direzione $y = x^2$ si ha $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x^2+x^4} = \frac{0}{0}$, poiché $\sin x^3$ è asintotico a x^3 per $x \to 0$ e $x^2 + x^4$ è asintotico a x^2 per $x \to 0$, si ha: $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$
dunque il limite dato non esiste.