Università "Carlo Cattaneo"

Ingegneria gestionale

Analisi matematica

a.a. 2018/2019

FUNZIONI IN DUE VARIABILI – Ancora sul calcolo differenziale

ESERCIZI CON SOLUZIONE

1. Calcolare le derivate parziali seconde delle seguenti funzioni:

a) $f(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{7x+4y-2}}$
b) $f(x,y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$
c) $f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x}}{y}$

a) $f_{xx} = -\frac{147}{4}(7x + 4y - 2)^{-\frac{5}{2}}$
$f_{yy} = -12(7x + 4y - 2)^{-\frac{5}{2}}$
$f_{xy} = f_{yx} = -21(7x + 4y - 2)^{-\frac{5}{2}}$
b) $f_{xx} = -2\frac{1+x^2-y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$
$f_{yy} = -2\frac{1-x^2+y^2}{(1-x^2-y^2)^2}$
$f_{xy} = f_{yx} = \frac{-4xy}{(1-x^2-y^2)^2}$
c) $f_{xx} = -\frac{1}{4y}(1 - x)^{-\frac{3}{2}}$
$f_{yy} = \frac{2\sqrt{1-x}}{y^3}$
$f_{xy} = f_{yx} = \frac{1}{2y^2\sqrt{1-x}}$

2. Determinare la direzione di massima e minima crescita della seguente funzione:
$f(x,y) = \ln(x^2 + 3y^3)$ in $(2,1)$.

Le derivate parziali della funzione risultano:
$f_x = \frac{2x}{x^2+3y^3}$
$f_y = \frac{9y^2}{x^2+3y^3}$
Il vettore gradiente nel punto dato risulta: $\nabla f(2,1) = \left(\frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right)$.
Dunque la direzione di massima crescita è data dal vettore gradiente normalizzato

$$\boldsymbol{d_{max}} = \frac{\left(\frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right)}{\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{4}{7}, \frac{9}{7}\right)}{\frac{\sqrt{97}}{7}} = \left(\frac{4}{\sqrt{97}}, \frac{9}{\sqrt{97}}\right)$$

la direzione di minima crescita è data dall'opposto vettore gradiente normalizzato

$$\boldsymbol{d_{min}} = \left(-\frac{4}{\sqrt{97}}, -\frac{9}{\sqrt{97}}\right)$$

3. Determinare le derivate direzionali delle seguenti funzioni lungo le direzioni assegnate nei punti indicati:

a) $f(x,y) = x^2 + xy - 2$ in $(1,0)$ lungo il vettore con direzione di $x - 2y = 0$
b) $f(x,y) = e^x \cos y$ in $(0,0)$ lungo il vettore con direzione di $y = 2x$
c) $f(x,y) = \sqrt{|x^2 - xy|}$ in $(0,0)$ lungo il vettore $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

a) Si tratta di una funzione polinomiale dunque sicuramente differenziabile, possiamo dunque calcolare la derivata direzionale con il gradiente:
$\nabla f(1,0) = (2,1)$
la direzione è quella di $y = \frac{1}{2}x$, quindi $\boldsymbol{v} = (2,1)$. Dunque:
$$D_{\boldsymbol{v}} f = (2,1) \cdot \frac{(2,1)}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$
b) Si tratta di una funzione le cui derivate parziali risultano continue nel dominio e quindi differenziabile, possiamo dunque calcolare la derivata direzionale con il gradiente:
$\nabla f(0,0) = (1,0)$
la direzione è quella di $\boldsymbol{v} = (1,2)$. Dunque:
$$D_{\boldsymbol{v}} f = (1,0) \cdot \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
c) Le derivate parziali hanno dei problemi di esistenza nel punto $(0,0)$, dunque procediamo al calcolo della derivata direzionale applicando la definizione:
$$D_{\boldsymbol{v}} f = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2}h, 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}h\right) - f(0,0)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{\left|\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h^2\right|} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

4. Scrivere l'equazione del differenziale (cioè del piano tangente) a:
a) $f(x,y) = x^3 - y^3$ in $(0,1)$
b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ in $(2,0)$

a) $df = f(0,1) + \nabla f(0,1) \cdot (x, y - 1) = 2 - 3y$
b) $df = f(2,0) + \nabla f(2,0) \cdot (x - 2, y) = x$