Università "Carlo Cattaneo"
Ingegneria gestionale
Analisi matematica
a.a. 2018/2019

OTTIMIZZAZIONE LIBERA 1

ESERCIZI CON SOLUZIONE

1. Calcolare i punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

a) $f(x, y) = x^2y + x^2 - 2y$
b) $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$
c) $f(x, y) = \ln(1 + x^2y^2)$
d) $f(x, y) = x \cos y$
e) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$
f) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$
g) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+2y^2}$

a) Si tratta di una funzione polinomiale e dunque differenziabile (quante volte si vuole):
$\nabla f(x, y) = (2xy + 2x, x^2 - 2)$
i punti stazionari sono dati risolvendo $\nabla f(x, y) = (0,0)$ da cui si ottengono i punti $(\sqrt{2}, -1)$ e $(-\sqrt{2}, -1)$.
Per determinare la natura dei punti si calcola l'hessiana:
$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 + 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$
Valutando l'hessiana nei due punti si ottiene:
$H(\sqrt{2}, -1) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ e $\det H = -8 < 0$
$H(-\sqrt{2}, -1) = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ e $\det H = -8 < 0$
si conclude che i punti $(\sqrt{2}, -1)$ e $(-\sqrt{2}, -1)$ sono entrambi punti di sella.

b) Si tratta di una funzione polinomiale e dunque differenziabile:
$\nabla f(x, y) = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$
i punti stazionari sono dati risolvendo $\nabla f(x, y) = (0,0)$ da cui si ottengono i punti $(0,0)$ e $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
Per determinare la natura dei punti si calcola l'hessiana:
$H(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{bmatrix}$
Valutando l'hessiana nei due punti si ottiene:
$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\det H = -1 < 0$
dunque $(0,0)$ è un punto di sella.
$H\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $\det H = 3 > 0$ e $H_{11} = -2 < 0$

dunque $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ è punto di massimo locale.

c) Calcolando il gradiente della funzione si ha $\nabla f(x,y)=\left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2},\frac{2x^2y}{1+x^2y^2}\right)$, si osserva che le derivate parziali sono continue nel dominio e dunque la funzione è differenziabile.
I punti stazionari risultano $(a,0)$ e $(0,b)$ con a e b numeri reali. Calcolando l'hessiana si ha:
$$H(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{2y^2-2x^2y^4}{(1+x^2y^2)^2} & \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2}\\ \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2} & \frac{2x^2-2x^4y^2}{(1+x^2y^2)^2}\end{bmatrix}$$
Valutandola nei punti stazionari si ottiene:
$H(a,0)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2a^2\end{bmatrix}$, $detH=0$ quindi non possiamo dedurre nulla sulla natura dei punti.
$H(0,b)=\begin{bmatrix}2b^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $detH=0$ quindi non possiamo dedurre nulla sulla natura dei punti.
Per cercare gli eventuali punti di massimo e minimo della funzione procediamo studiando il segno nell'intorno dei punti.
Consideriamo i punti $(a,0)$:
$f(x,y)-f(a,0)=\ln(1+x^2y^2)-0$
Si nota che $\ln(1+x^2y^2)\geq 0$ nell'intorno dei punto, infatti:
$\ln(1+x^2y^2)\geq 0$
$1+x^2y^2\geq e^0$
$x^2y^2\geq 0$ è verificata.
Consideriamo i punti $(0,b)$:
$f(x,y)-f(0,b)=\ln(1+x^2y^2)-0$
Analogamente a quanto detto sopra nell'intorno dei punti.
Possiamo concludere che la funzione ammette infiniti punti di minimo in corrispondenza dei punti $(a,0)$ e $(0,b)$.

d) Il gradiente della funzione risulta $\nabla f(x,y)=(\cos y,-x\sin y)$, si osserva che le derivate parziali sono continue nel dominio e dunque la funzione è differenziabile.
Annullando le componenti del gradiente si ottengono infiniti punti stazionari della forma $\left(0,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ con $k=0,1,2,3,\dots$
Calcolando l'hessiana si ha:
$$H(x,y)=\begin{bmatrix}0 & -\sin y\\ -\sin y & -x\cos y\end{bmatrix}$$
E si osserva che
$H\left(0,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=\begin{bmatrix}0 & \pm 1\\ \pm 1 & 0\end{bmatrix}$ il suo determinante è sempre negativo dunque i punti stazionari sono tuti punti di sella.

e) Calcolando il gradiente si ha $\nabla f(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$, si osserva che le derivate parziali sono continue nel dominio e dunque la funzione è differenziabile.
Annullando le componenti del gradiente si ottiene il punto (0,0).

Calcolando l'hessiana si ha:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1+y^2}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} & \frac{-xy}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ \frac{-xy}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} & \frac{1+x^2}{(1+x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}} \end{bmatrix}$$

Valutandola nel punto stazionario

$H(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\det H = 1 > 0$ e $H_{11} = 1 > 0$

dunque (0,0) è punto di minimo locale.

f) Analogamente a quanto fatto sopra si ottiene che (0,0) è punto di minimo locale.

g) La funzione è definita continua per ogni $(x,y) \neq (0,0)$.
Il gradiente risulta $\nabla f(x,y) = \left(\frac{-2x}{(x^2+2y^2)^2}, \frac{-4y}{(x^2+2y^2)^2}\right)$ e le derivate parziali sono continue nel dominio, quindi la funzione è differenziabile. Il gradiente si annulla in (0,0) punto non appartenente al dominio della funzione. Non esistono dunque punti stazionari e la funzione non ammette punti di massimo e di minimo.