Primo Appello 10 gennaio 2020

1. Risolvere i seguenti esercizi.

a. (4 pt) Date le matrici dipendenti dal parametro $k \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & k & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Calcolare la matrice prodotto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
2. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il rango della matrice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ottenuta al punto precedente.

b. (3 pt) Data la funzione

$$f(x) = \ln(x - x^2)$$

determinarne il dominio ed i punti stazionari, precisandone la natura.

c. (3 pt) Un'azienda di elettrodomestici ha una funzione di costo marginale per la produzione di $x \geq 0$ lavatrici definita da

$$c(x) = 12 - 0,2x$$

1. Ricavare la funzione di costo totale $C(x)$, sapendo che il costo per la produzione di 10 lavatrici è di $910,50$ Euro.
2. Sapendo che il prezzo di vendita unitario è 120 Euro, scrivere l'espressione analitica della funzione di profitto $\pi(x)$.

Soluzioni:

(a)

1. Risulta

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & k & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2k & 8 \end{bmatrix}$$

2. Si può ricavare, con il metodo di Sarrus, che

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2k & 8 \end{bmatrix} = -6k$$

Se $-6k \neq 0$, ossia $k \neq 0$, $\rho(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 3$. Se invece $-6k = 0$, ossia $k = 0$, poiché la matrice $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ è un minore non nullo di $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\rho(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 2$.

(b) Per ricavare il dominio di $f(x)$ bisogna porre

$$x - x^2 > 0$$

da cui $\texttt{dom}\ f = (0,1)$. La derivata prima di $f(x)$ si ricava con la regola della catena (derivata della funzione composta) e si ottiene

$$f'(x) = \frac{1-2x}{x-x^2}$$

Poiché nel dominio il denominatore della funzione derivata prima è positivo, studiando il segno di $f'(x)$ si ricava che $x = \dfrac{1}{2}$ è un punto di massimo. Tale massimo è globale, in quanto

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

e $f'(x) > 0$ per $0 < x < \frac{1}{2}$ e $f'(x) < 0$ per $\frac{1}{2} < x < 1$.

(c)

1. Per trovare il costo totale di $c(x)$ è necessario trovare la primitiva di $c(x)$ passante per il punto $(10; 910,50)$. Poiché

$$\int (12 - 0,2x)\ dx = 12x - 0,1x^2 + K$$

imponendo la condizione di passaggio per $(10; 910,50)$, si ricava $K = 800,5$. Pertanto la funzione di costo totale è

$$C(x) = 800,5 + 12x - 0,1x^2$$

2. Dato che il prezzo unitario è $p = 120$, la funzione ricavo $R(x)$ in funzione della quantità x è $R(x) = 120x$. Quindi

$$\pi(x) = R(x) - C(x) = 108x + 0,1x^2 - 800,5$$

2. Un contratto di credito al consumo per l'acquisto di un televisore del valore $A = 4.500,00$ Euro, prevede un anticipo pari al 10% di A ed il pagamento di rate mensili posticipate costanti per 5 anni. Il contratto indica un tasso annuo nominale, convertibile mensilmente, $j_{12} = 4,90\%$.

a. (3 pt) Determinare l'importo del tasso d'interesse annuo effettivo equivalente a j_{12}.

b. (4 pt) Determinare l'importo delle rate costanti, scomponendo la terza rata in quota capitale e quota interesse.

c. (3 pt) Il contratto prevede la possibilità di estinzione anticipata, da esercitare alla scadenza di una qualsiasi rata mediante il pagamento del valore attualizzato della rate residue ad un TAN pari alla metà del tasso contrattuale. Determinare l'importo che dovrebbe essere versato dopo il pagamento della 24-esima rata per estinguere anticipatamente il finanziamento.

Soluzione:

(a) Il tasso d'interesse annuo effettivo è

$$i_{12} = \left(1 + \frac{j_{12}}{12}\right)^{12} - 1 = 0,050116$$

(b) La rata deve soddisfare la condizione di chiusura

$$4.500 = 450 + R \cdot \frac{1 - (1 + i_{12})^{-60}}{i_{12}}$$

dove $i_{12} = \frac{j_{12}}{12} = 0,004083$, da cui

$$R = 4.050 \cdot \frac{i_{12}}{1 - (1 + i_{12})^{-60}} = 76,243 \text{ Euro}$$

Poiché $D_0 = 4.050$, $D_1 = D_0 \cdot (1 + i_{12}) - R = 3.990,295$ e $D_2 = D_1 \cdot (1 + i_{12}) - R = 3.930,345$, si ha

$$I_3 = D_2 \cdot i_{12} = 16,049$$

e

$$C_3 = R - I_3 = 60,194$$

(c) Dopo il pagamento della 24-esima rata restano da corrispondere $n = 60 - 24 = 36$ rate costanti. Il tasso d'interesse mensile effettivo è

$$x_{12} = \frac{\left(\frac{j_{12}}{2}\right)}{12} = \frac{4,90\%}{24} = 0,002042$$

Pertanto il valore da corrispondere è

$$V = R \cdot \frac{1 - (1 + x_{12})^{-36}}{x_{12}} = 2.643,705$$

3. Rispondere ai seguenti quesiti.

a. (2 pt) Enunciare due delle tre condizioni di chiusura di un ammortamento in funzione di una generica legge finanziaria di capitalizzazione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con legge di attualizzazione coniugata $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Soluzione: Si veda il libro di testo.

b. (3 pt) Enunciare la definizione di funzione $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in (a, b)$.

Soluzione: Si veda il libro di testo.

4. (standard) Risolvere i seguenti quesiti.

a. (4 pt) Una rendita anticipata prevede rate trimestrali costanti di importo $R = 150,00$ Euro. Adottando un tasso d'interesse annuo composto effettivo $i = 8\%$, determinare

   1. Il valore attuale ed il montante di questa rendita anticipata con durata 10 anni;
   2. Il valore attuale della rendita posticipata perpetua con pari rata e frequenza della stessa.

b. (4 pt) Data la funzione di due variabili

$$F(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 2y$$

   1. Determinare il vettore gradiente di F;
   2. Determinare i punti stazionari e gli eventuali estremanti relativi.

Soluzione:

(a)

1. Il numero delle rate è $n = 4 \cdot 10 = 40$. Quindi

$$A = 150 \cdot \frac{1 - (1 + i_4)^{-40}}{i_4} (1 + i_4) = 4.225,172$$

dove $i_4 = (1 + 8\%)^{1/4} - 1 = 0,01943$. Analogamente il montante è

$$M = 150 \cdot \frac{(1 + i_4)^{40} - 1}{i_4} (1 + i_4) = A \cdot (1 + i_4)^{40} = 9.123,066$$

2. Risulta

$$A = \frac{150}{i_4} = 7.720,021$$

(b)

1. Risulta

$$\nabla F(x, y) = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ \\ 3x + 2y + 2 \end{bmatrix}$$

2. I punti stazionari sono le soluzioni del sistema (lineare)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

ovvero il punto di coordinate $\left[x = -\frac{6}{5}, y = \frac{4}{5}\right]$. Per stabilirne la natura occorre studiare la matrice Hessiana nel punto stazionario. Poiché risulta

$$\nabla^2 F(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

costante in tutto il dominio della funzione, i minori principali di NW nel punto stazionario sono

$$H_1 = 2 > 0 \quad \text{e} \quad H_2 = \det \nabla^2 F\left(-\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right) = -5 < 0$$

il punto, quindi, non è un estremante.