ESERCIZIO 1

Il rendimento annuo di un titolo viene descritto mediante una distribuzione normale. I e III quartile del rendimento sono uguali a, rispettivamente, -0.1 e 0.3. Si calcoli la probabilità che il rendimento sia negativo.

Soluzione

Si ponga X = rendimento annuo di un titolo. Allora sappiamo che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Per poter ottenere $\mathbb{P}(X \leq 0)$ abbiamo bisogno di standardizzare la variable usando la formula $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ e poi utilizzare le tavole.
Bisogna quindi trovare media e varianza della distribuzione.
Procedimento per ottenere la media μ della distribuzione dati i due quartili:

$$q_1 = -0.1 \quad \rightarrow \quad \mathbb{P}(X \leq -0.1) = 0.25$$

$$q_3 = 0.3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{P}(X \leq 0.3) = 0.75$$

$$q_2 = \mu = \frac{q_1 + q_3}{2} = 0.1$$

Procedimento per trovare la deviazione standard σ della distribuzione dato un quartile e la media:

$$\mathbb{P}(X \leq 0.3) = 0.75 \quad \rightarrow \quad \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{0.3 - 0.1}{\sigma}\right) = F_Z\left(\frac{0.3 - 0.1}{\sigma}\right) = 0.75$$

Usando le tavole trovo che il valore $z = \frac{0.3-0.1}{\sigma}$ per il quale la funzione di ripartizione della normale standard è pari a 0.75 è $z = 0.67$. Si ottiene dunque la deviazione standard:

$$0.67 = \frac{0.3 - 0.1}{\sigma} \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{0.2}{0.67} = 0.2985$$

Dunque otteniamo il risultato richiesto come segue (la quarta disuguaglianza è ottenuta guardando le tavole)

$$\mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{0 - 0.1}{0.2985}\right) = \mathbb{P}(Z \leq -0.33) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0.33) = 1 - 0.6293 = 0.3707$$

ESERCIZIO 2

In una popolazione, la quantità di calorie assunte giornalmente da un individuo è ben descritta da una distribuzione gaussiana con media 2500 calorie e scarto quadratico medio 300.
a) Si calcoli la probabilità che il consumo calorico giornaliero di un individuo scelto a caso dalla popolazione sia maggiore di 3000; ovvero, equivalentemente, la percentuale di individui nella popolazione che consumano giornalmente più di 3000 calorie, sulla base del modello proposto.
b) Qual è il valore del consumo calorico che un individuo scelto a caso dalla popolazione supera con probabilità pari a 0.6? Ovvero, in altri termini, qual è il consumo calorico superato dal 60% degli individui della popolazione?

Soluzione

Si ponga X = quantità di calorie assunte giornalmente da un individuo. Allora sappiamo che $X \sim \mathcal{N}(\mu = 2500, \sigma^2 = 300^2)$.
a) $\mathbb{P}(X \geq 3000) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3000) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{3000-2500}{300}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq 1.67\right) = 1 - F_Z(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$. Si noti che la quinta uguaglianza è ottenuta con le tavole.
b) Sia x il valore del consumo calorico ricercato, tale quindi che $\mathbb{P}(X > x) = 0.6$ o, equivalentemente, $\mathbb{P}(X \leq x) = 0.4$. Dunque $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x-2500}{300}\right)$. $\frac{x-2500}{300}$ è allora il quantile di ordine 0.4 di una Normale Standard. Dalle tavole si ottiene $z = -0.25$ e dunque $x = -0.25 * 300 + 2500 = 2425$.

ESERCIZIO 3

Si è interessati alla spesa annua sostenuta dalle famiglie di una regione per attività di svago. Si estrae, a caso, una famiglia che risiede in questa regione; la distribuzione della variabile aleatoria che descrive la sua spesa annua in attività di svago si assume gaussiana, con una varianza che, sulla base di preesistenti informazioni sulla variabilità delle quantità in gioco, è fissata pari a 10000 ($euro^2$).

a) Se la spesa media annua delle famiglie della regione fosse pari a 1000 euro, quale sarebbe la probabilità che la famiglia estratta a caso abbia sostenuto una spesa compresa tra 750 e 1750 euro?

b) Si determini la probabilità che una famiglia scelta a caso spenda più di 1750 Euro.

c) Successivamente, si rileva la spesa annua della famiglia estratta, ed essa risulta pari a 2000 euro. Alla luce di questo dato (e del modello utilizzato) è ragionevole ipotizzare che la spesa media annua delle famiglie della regione sia pari a 1000 euro? Si giustifichi opportunamente la risposta.

Soluzione

a) Si ponga X = spesa annua sostenuta dalle famiglie di una regione per attività di svago. Allora sappiamo che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 10000)$.

Si assuma $\mu = 1000$ e si noti che $\sigma = 100$.

$\mathbb{P}(750 < X < 1750) = \mathbb{P}\left(\frac{750-1000}{100} < Z < \frac{1750-1000}{100}\right) = \mathbb{P}(-2.5 < Z < 7.5) = F_Z(7.5) - F_Z(-2.5) = 0.9938 \simeq 1$.

b) Dallo svolgimento del punto a) risulta che la probabilità di una spesa superiore a 1750 è all'incirca uguale a 0. c) No, non è ragionevole; infatti la probabilità di osservare una spesa pari o superiore a 1750 è zero se la media è 1000.

ESERCIZIO 4

Il ricavo settimanale (in migliaia di euro) risultante dalle vendite di una rivista è modellizzato mediante una distribuzione gaussiana, di varianza pari a 5; tale valore si suppone assegnato sulla base di informazioni precedenti sulla variabilità delle vendite.
a) Qual è la probabilità che, in una settimana, il ricavo differisca dal ricavo medio per più di 2 (migliaia di euro)?
b) Se il ricavo settimanale medio fosse uguale a 20 (migliaia di euro), quale sarebbe la probabilità che il ricavo in una settimana (a caso) superi 12 (migliaia di euro)?

Soluzione

Si ponga X = ricavo settimanale risultante dalle vendite di una rivista. Allora sappiamo che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 5)$.
a) $\mathbb{P}[(X > \mu{+}2)\,\text{oppure}\,(X < \mu{-}2)] = 1{-}\mathbb{P}(\mu{-}2 < X < \mu{+}2) = 1{-}\mathbb{P}\left(\frac{\mu-2-\mu}{\sigma} < Z < \frac{\mu+2-\mu}{\sigma}\right) =$
$1 - \mathbb{P}(-\frac{2}{\sqrt{5}} < Z < \frac{2}{\sqrt{5}}) = 1 - \mathbb{P}(-0.89 < Z < 0.89) = 1 - [F_Z(0.89) - (1 - F_Z(0.89)] =$
$2 - 2 * 0.7244 = 0.3734.$
b) Si assuma $\mu = 20$. Allora $\mathbb{P}(X > 12) = 1 - \mathbb{P}(X < 12) = 1 - \mathbb{P}\left(Z < \frac{12-20}{\sqrt{5}}\right) =$
$1 - F_Z(-3.57) \simeq 1.$