ESERCIZIO 1

Per descrivere il numero di guasti mensili cui sono soggette le due parti A e B di un impianto industriale viene utilizzata la seguente distribuzione di probabilità:

X Y	**0**	**1**	**2**	*Tot.*
0	0.2	0.1	0	*0.3*
1	0.1	0.2	0.2	*0.5*
2	0	0	0.2	*0.2*
Tot.	*0.3*	*0.3*	*0.4*	*1*

dove X = numero di guasti di A e Y = numero di guasti di B

a) Si calcoli la probabilità che A abbia almeno un guasto.
b) Si calcoli la probabilità che A e B abbiano entrambi almeno un guasto .
c) Si calcoli la probabilità che vi sia stato un guasto nel complesso.
d) Si calcoli il numero atteso di guasti di B.
e) Si dica se è più variabile il numero di guasti di A o quello di B.
f) Si calcoli il numero atteso di guasti totali.
g) La riparazione di un guasto di A costa 100; quella di un guasto di B costa 150. Si calcoli il costo totale atteso di riparazione mensile.

Soluzione

Si ponga X = numero di guasti di A e Y = numero di guasti di B.
a) $P(X \geq 1) = 0.5 + 0.2 = 0.7$.
b) $P[(X \geq 1)$ e $P(Y \geq 1)] = 0.2 + 0.2 + 0.2 + 0 = 0.6$ (vedi fig. 1).

X \ Y	0	1	2	
0	0.2	0.1	0	0.3
1	0.1	0.2	0.2	0.5
2	0	0	0.2	0.2
	0.3	0.3	0.4	

Figure 1

c) $P(X+Y=1) = 0.1 + 0.1 = 0.2$ (vedi fig. 2).

X \ Y	0	1	2	
0	0.2	0.1	0	0.3
1	0.1	0.2	0.2	0.5
2	0	0	0.2	0.2
	0.3	0.3	0.4	

Figure 2

d) $E(Y) = 0P(Y=0) + 1P(Y=1) + 2P(Y=2) = 0.3 + 0.8 = 1.1$

e) Si calcoli prima il valore atteso di guasti di A, $E(X) = 0.9$, e le due varianze:

$$Var(X) = 0^2 P(X=0) + 1^2 P(X=1) + 2^2 P(X=2) - E(X)^2 = 0.5 + 0.8 - 0.81 = 0.49$$

$$Var(Y) = 0^2 P(Y=0) + 1^2 P(Y=1) + 2^2 P(Y=2) - E(Y)^2 = 0.3 + 1.6 - 1.21 = 0.69$$

Utilizzando il coefficiente di variazione si può notare che il numero di guasti di A è di poco più variabile del numero di guasti di B:

$$CV(X) = \frac{\sqrt{0.49}}{0.9} = 0.778 \qquad CV(Y) = \frac{\sqrt{0.69}}{1.1} = 0.755$$

f) $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2$

g) Si ponga $C =$ costo di riparazione. Allora $E(C) = E(100X + 150Y) = 100E(X) + 150E(Y) = 255$.

ESERCIZIO 2

La realizzazione di un prodotto consta di 3 fasi: A, B e C.
Sia X il tempo (in secondi) della fase A, Y quello della fase B e Z quello della fase C. X è descritto da una distribuzione normale di media 40 e varianza 9; Y e Z hanno media rispettivamente 40 e 50 e varianza 4 e 9. Inoltre:
$Cov(X, Y) = 4$, $Cov(X, Z) = -1$, $Cov(Z, Y) = 3$.
a) Si calcoli la probabilità che il tempo della fase A sia inferiore a 35 secondi.
b) Per la fase A, qual è il tempo superato con probabilità 0.1?
c) Qual è il tempo atteso di lavorazione totale?
d) Qual è la sua varianza?
e) 1 secondo di lavorazione della fase A ha costo pari a 7, 1 secondo della fase B ha costo pari a 6, 1 secondo della fase C ha costo pari a 8. Si calcoli la varianza del costo totale di lavorazione del prodotto.
f) Supponendo che il costo totale abbia distribuzione normale , si calcoli la probabilità che il costo totale sia compreso tra 900 e 1000.

Soluzione

Si ponga X il tempo (in secondi) della fase A, Y quello della fase B e Z quello della fase C. Si assuma che $X \sim \mathcal{N}(\mu = 40, \sigma^2 = 9)$, $E(Y) = 40$, $E(Z) = 50$, $Var(Y) = 4$, $Var(X) = 9$, $Cov(X, Y) = 4$, $Cov(X, Z) = -1$, $Cov(Z, Y) = 3$.
a) $P(X < 35) = P\left(Z < \frac{35-40}{3}\right) = F_Z(-1.67) = 1 - F_Z(1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$.
b) Bisogna risolvere l'equazione (in x) $P(X > x) = 0.1$ o, equivalentemente, $P(X < x) = 0.9$. Standardizzando, $P\left(Z < z = \frac{x-40}{3}\right) = 0.9$, e usando le tavole si trova $z = 1.28$ che equivale alla cifra $x = z * 3 + 40 = 43.84$.
c) $E(X + Y + Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = 40 + 40 + 50 = 130$.
d) $Var(X + Y + Z) = Var(X) + Var(Y) + Var(Z) + 2Cov(X, Y) + 2Cov(X, Z) + 2Cov(Y, Z) = 9 + 4 + 9 + 2 * 4 + 2 * (-1) + 2 * 3 = 34$.
e) Si ponga C = costo di lavorazione. Dunque $Var(C) = Var(7X + 6Y + 8Z) =$

$49Var(X) + 36Var(Y) + 64Var(Z) + 84Cov(X,Y) + 112Cov(X,Z) + 96Cov(Y,Z) =$
$49 * 9 + 36 * 4 + 64 * 9 + 84 * 4 + 112 * (-1) + 96 * 3 = 1673.$
f) Si assuma $C \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 1673)$ con $\mu = E(C) = E(7X + 6Y + 8Z) = 920$.
Dunque $P(900 < C < 1000) = P\left(\frac{900-920}{\sqrt{1673}} < Z < \frac{1000-920}{\sqrt{1673}}\right) = F_Z(1.96) - F_Z(-0.49) =$
$F_Z(1.96) - 1 + F_Z(0.49) = 0.975 - 1 + 0.6879 = 0.6629.$

ESERCIZIO 3

Siano X,Y e Z variabili aleatorie con X distribuita normalmente con media -3 e varianza 9 , Y distribuita normalmente con media 0 e varianza 4 e Z distribuita normalmente con media 2 e varianza 2.

Consideriamo $T = X - Y - Z$

Supponiamo: $\rho(X, Y) = -0.3$, $\rho(X, Z) = 0$ e $\rho(Y, Z) = 0.2$

a) Calcolare $E(T)$

b) Calcolare $Var(T)$

c) Supponendo T normale, calcolare il quantile di ordine 0.4 di T.

Soluzione

Si pongano $X \sim \mathcal{N}(\mu = -3, \sigma^2 = 9)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 4)$ e $Z \sim \mathcal{N}(\mu = 2, \sigma^2 = 2)$.
Sia $T = X - Y - Z$ e si assuma $\rho(X, Y) = -0.3$, $\rho(X, Z) = 0$ e $\rho(Z, Y) = 0.2$.

a) $E(T) = E(X - Y - Z) = E(X) - E(Y) - E(Z) = -3 - 2 = -5$.

b) Per calcolare le covarianze si usa la seguente formula: $\text{ov}(X, Y) = \rho(X, Y)\sqrt{VarXVar(Y)}$; si ottiene dunque $\text{ov}(X, Y) = -1.8$, $\text{ov}(X, Z) = 0$ e $\text{ov}(Z, Y) = 0.566$. Si puo quindi calcolare a varianza di T come segue: $Var(T) = Var(X-Y-Z) = Var(X)+Var(Y)+Var(Z)-2Cov(X, Y)-2Cov(X, Z)+2Cov(Y, Z) \simeq 9+4+2+2*1.8+2*0.5657 = 19.7314$.

c) Si assuma $T \sim \mathcal{N}(\mu = -5, \sigma^2 = 19.7314)$. Per calcolare il quantile bisogna risolvere l'equazione $0.4 = F_T q_{0.4} = P(T < q_{0.4})$ o, equivalentemente, $0.4 = P\left(Z < z = \frac{q_{0.4}+5}{\sqrt{19.7314}}\right)$.
Usando le tavole si trova $z = -0.25$ che equivale al quantile $q_{0.4} = z * \sqrt{19.7314} - 5 = -6.11$.

ESERCIZIO 4

Il tempo totale impiegato da un dipendente di un'azienda per raggiungere, da casa, il luogo di lavoro è dato dalla somma dei seguenti 4 tempi:

1: tempo impiegato per raggiungere, a piedi, la fermata del tram, pari a 6 minuti;

2: tempo di attesa del tram, descritto da una variabile aleatoria con distribuzione normale di media 7 minuti e scarto quadratico medio di 2 minuti;

3: tempo impiegato per percorrere il tratto in tram, descritto da una variabile aleatoria con distribuzione normale di media 16 e scarto quadratico medio 3;

4: tempo impiegato per percorrere, a piedi, il tratto fermata del tram-luogo di lavoro, pari a 1 minuto.

Si supponga che il tempo di attesa ed il tempo di percorrenza del tram siano associati e che il legame sia descritto da una covarianza pari a 4.

a) Si calcoli la probabilità che il tempo di percorrenza del tram sia superiore a 14 minuti.

b) Si dica, giustificando la risposta, se è da ritenersi meno variabile il tempo di attesa o il tempo di percorrenza del tram.

c) Supponendo distribuito in accordo ad una normale anche il tempo totale impiegato dalla persona per il percorso casa-lavoro, si calcoli la probabilità che tale tempo sia maggiore di 35 minuti.

d) Se il dipendente deve essere al lavoro alle ore 9.00, a che ora deve partire per limitare la probabilità di arrivare in ritardo al 5%?

Soluzione

Si ponga T = tempo impiegato da un dipendente di un'azienda per raggiungere, da casa, il luogo di lavoro. Allora abbiamo che $T = X + Y + J + H$ dove $X = 6$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y = 7, \sigma_Y = 2)$, $J \sim \mathcal{N}(\mu_J = 16, \sigma_J = 3)$ e $H = 1$. Si assuma inoltre che $Cov(Y, J) = 4$.

a) $P(J > 14) = P\left(Z > \frac{14-16}{3}\right) = P(Z > -0.67) = F_Z(0.67) = 1 - 0.9525 = 0.7486$.

b) Si utilizzi il coefficiente di variazione dei due tempi

$$\text{C.V.}(Y) = \frac{2}{7} = 0.2857 \qquad \text{C.V.}(J) = \frac{3}{16} = 0.1875$$

dunque il tempo di attesa Y è più variabile del tempo di percorrenza del tram, J.

c) Si assuma $T \sim \mathcal{N}(\mu_T, \sigma_T^2)$ dove $\mu_T = E(T) = E(X+Y+J+H) = 7+E(X)+E(J) = 30$ e $\sigma_T^2 = \sigma^2(Y+J) = \sigma^2(Y) + \sigma^2(J) + 2Cov(Y,J) = 4+9+8 = 21$. Dunque $P(T > 35) = P\left(Z > \frac{35-30}{\sqrt{21}}\right) = P(T > 1.09) = 1 - F_Z(1.09) = 1 - 0.8621 = 0.1379$.

d) Bisogna risolvere l'equazione (in t) $P(T > t) = 0.05$ o, equivalentemente, $P\left(Z > z = \frac{t-30}{\sqrt{21}}\right) = 0.05$. Usando le tavole si ottiene $z = 1.64$ che equivale a $t = z * \sqrt{21} + 30 = 37.52$. Il lavoratore deve quindi uscire di casa circa 38 minuti prima delle 9:00, ossia alle 8:22.