

**ESERCIZIO 1** Il numero di accessi ad un Pronto Soccorso ha distribuzione di Poisson; in un quarto d'ora vi sono mediamente 6 accessi.

- Si calcoli la probabilità che in un quarto d'ora vi siano più di 4 accessi.
- Si calcoli la probabilità che in cinque minuti vi siano non più di 3 accessi.
- Ogni accesso al Pronto Soccorso ha, per l'ospedale, un costo pari a 50 €. Si calcolino il valore atteso e la varianza del costo totale sostenuto dall'ospedale in un quarto d'ora.

**ESERCIZIO 2** Un prodotto tecnologico viene dato in prova per un mese a 7 consumatori, che possono trattenerlo (pagandolo) o restituirlo. La probabilità che il prodotto venga restituito è 0.33.

- Si calcoli la probabilità che un solo consumatore tra i 7 restituisca il prodotto.
- Si calcoli la probabilità che meno di 5 consumatori restituiscano il prodotto.
- Il danno subito dal produttore per ogni unità di prodotto restituita è quantificabile in 20 €. Si calcolino la media e la varianza del danno totale.

**ESERCIZIO 3** Si consideri un portafoglio il cui rendimento annuo è dato per il 30% da un titolo A, per il 20% da un titolo B, per il 50% da un titolo C. Il rendimento di A ha distribuzione normale con media 0.03 e scarto quadratico medio 0.02, il rendimento di B ha media 0.07 e scarto quadratico medio 0.01, il rendimento di C ha media 0.08 e scarto quadratico medio 0.04. Inoltre, i rendimenti di A e B hanno coefficiente di correlazione lineare nullo, quelli di A e C hanno coefficiente di correlazione lineare 0.3, quelli di B e C hanno covarianza 0.0002.

- Si calcoli la probabilità che il rendimento di A sia maggiore di 0.05.
- Si determini il quantile di ordine 0.72 del rendimento di A.
- Si determini il valore atteso del rendimento del portafoglio.
- Si determini lo scarto quadratico medio del rendimento del portafoglio.
- I rendimenti di A e B sono indipendenti? Si giustifichi la risposta.

**ESERCIZIO 4** Si considerino 200 pacchi, i cui pesi sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con media 1300 grammi e scarto quadratico medio 430 grammi.

- Si calcolino il valore atteso e la varianza del peso medio dei 200 pacchi.
- Si calcoli la probabilità che il peso medio dei 200 pacchi sia maggiore di 1340.

**ESERCIZIO 5** Due variabili aleatorie X e Y hanno distribuzione congiunta data dalla seguente tabella a doppia entrata:

Y	-2	0	2
X			
-1	0.08	0.24	0.08
0	0.06	0.18	0.06
1	0.04	0.12	0.04
2	0.02	0.06	0.02

- Si calcoli il coefficiente di correlazione lineare di X e Y.
- Si calcoli la probabilità che X sia minore di 1 e Y maggiore o uguale a 0.
- Si determini la funzione di probabilità di  $Y^2$ .
- Si determini la varianza di  $Y^2$ .

**ESERCIZIO 6** Il peso associato ad un passeggero che prende un aereo (tale peso include il peso del passeggero e quello dei suoi bagagli) ha distribuzione normale con media 100 e scarto quadratico medio 15.

- Si calcoli la probabilità che tale peso associato al passeggero sia minore di 110.
- Si considerano 10 passeggeri. Si calcoli la probabilità che il peso totale associato ai 10 passeggeri sia minore di 1100.
- Si considerano 100 passeggeri. Si calcoli la probabilità che il peso totale associato ai 100 passeggeri sia minore di 11000.
- Se non si ipotizzasse la distribuzione normale per il peso, cambierebbero le risposte ai punti b) e c)?

**ESERCIZIO 7** Due variabili X e Y hanno distribuzione di Poisson di media 2 e 3 rispettivamente. Il loro coefficiente di correlazione lineare è pari a -0.8.

- Si calcoli la probabilità che X sia uguale a 5.
- Si dica se X e Y sono indipendenti. Nel caso non lo siano, si descriva il tipo e livello di associazione tra esse.
- Si calcoli la covarianza tra X e Y.
- Si calcoli la varianza di  $T=X-3Y$ .

ESERCIZIO 1

a)  $X =$  numero accessi in un quarto d'ora  
 $X \sim \text{Poisson}(6)$   
 $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.2851 = 0.7149$

b)  $Y =$  numero accessi in 5 minuti  
 $Y \sim \text{Poisson}(2)$   
 $P(Y \leq 3) = 0.8571$

c)  $T =$  costo totale in un quarto d'ora,  $T = 50X$   
 $E(T) = E(50X) = 50 \cdot E(X) = 50 \cdot 6 = 300$   
 $\text{Var}(T) = \text{Var}(50X) = 2500 \cdot \text{Var}(X) = 2500 \cdot 6 = 15000$

ESERCIZIO 2  $X =$  numero prodotti restituiti, tra i 7  
 $X \sim \text{Bin}(7, 0.33)$

a)  $P(X=1) = \frac{7!}{1! \cdot 6!} (0.33)^1 (0.67)^6 = 0.2089$

b)  $P(X < 5) = 1 - P(X=5) - P(X=6) - P(X=7) =$   
 $= 1 - 0.0369 - 0.0061 - 0.0004 =$   
 $= 0.9566$

c)  $T =$  danno totale;  $T = 20X$   
 $E(T) = 20 \cdot E(X) = 20 \cdot (7 \cdot 0.33) = 46.2$   
 $\text{Var}(T) = 400 \cdot \text{Var}(X) = 400 (7 \cdot 0.33 \cdot 0.67) = 619.08$

### ESERCIZIO 3

Rendimento del portafoglio =  $T = 0.3X + 0.2Y + 0.5U$ ,  
dove  $X, Y, U$  sono i rendimenti di A, B e C.

$$X \sim N(0.03, 0.02^2), E(Y) = 0.07, \sigma(Y) = 0.01$$
$$E(U) = 0.08, \sigma(U) = 0.04.$$

$$\rho(X, Y) = 0, \rho(X, U) = 0.3, \text{cov}(Y, U) = 0.0002$$

$$a) P(X > 0.05) = P\left(Z > \frac{0.05 - 0.03}{0.02}\right) = P(Z > 1) = 1 - 0.2413 = 0.1587$$

$$b) P(X \leq q_{0.72}) = P\left(Z \leq \frac{q_{0.72} - 0.03}{0.02}\right) = 0.72$$

$$\text{Quindi } \frac{q_{0.72} - 0.03}{0.02} = 0.58, \text{ ovvero } q_{0.72} = 0.0416$$

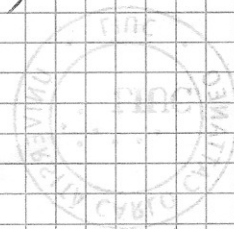
$$c) E(T) = (0.3)E(X) + (0.2)E(Y) + (0.5)E(U) =$$
$$= (0.3)(0.03) + (0.2)(0.07) + (0.5)(0.08) = 0.053$$

$$d) \text{Var}(T) = (0.3)^2 \text{Var}(X) + (0.2)^2 \text{Var}(Y) + (0.5)^2 \text{Var}(U) +$$
$$+ 2 \cdot 0.3 \cdot 0.2 \cdot \text{cov}(X, Y) + 2 \cdot (0.3) \cdot (0.5) \cdot \text{cov}(X, U) + 2 \cdot (0.2) \cdot (0.5) \cdot \text{cov}(Y, U) =$$

$$= (0.09) \cdot (0.02^2) + (0.04) \cdot (0.01)^2 + (0.25) \cdot (0.04)^2 +$$
$$+ 2 \cdot (0.3) \cdot (0.5) \cdot [(0.3) \cdot (0.02) \cdot (0.04)] + 2 \cdot (0.2) \cdot (0.5) \cdot (0.0002) =$$
$$= 0.000036 + 0.000004 + 0.0004 +$$
$$+ 0.000072 + 0.0004 = 0.000912$$

$$\sigma(T) = \sqrt{\text{Var}(T)} = \sqrt{0.000912} = 0.0302$$

e) Non è detto che siano indipendenti,  
ma possono esserlo.





## ESERCIZIO 4

$X_1, \dots, X_{200}$  pesi dei pacchi  
 $X_1, \dots, X_{200}$  i.i.d. con  $E(X_i) = 1300$   
e  $\sigma(X_i) = 430$

a)  $E(\bar{X}) = 1300$

$V_{\bar{X}}(\bar{X}) = \frac{430^2}{200} = 924.5$

b)  $\bar{X} \approx N(1300, 924.5)$  per il teorema  
centrale del limite

$$P(\bar{X} > 1340) = P\left(Z > \frac{1340 - 1300}{\sqrt{924.5}}\right) =$$
$$= P(Z > 1.32) = 1 - 0.9066 = 0.0934$$

## ESERCIZIO 5

a) Poiché  $P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$  per  
ogni  $x$  e  $y$ , si ha che  $X$  e  $Y$  sono indipendenti,  
per cui  $\rho(X, Y) = 0$ .

b)  $P(X < 1, Y \geq 0) = 0.55$

c)  $S_{Y_2} = \{0, 4\}$

$$p_{Y_2}(t) = \begin{cases} 0.6 & t=0 \\ 0.4 & t=4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$t=0$   
 $t=4$

altrove

d)  $V_{Y_2}(Y_2) = 0^2 \cdot (0.6) + 4^2 \cdot (0.4) - [0 \cdot 0.6 + 4 \cdot 0.4]^2 =$   
 $= 6.4 - 2.56 = 3.84$



## ESERCIZIO 6

$$X = \text{peso}, \quad X \sim N(100, 15^2)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X < 110) &= P\left(Z < \frac{110 - 100}{15}\right) = P(Z < 0.67) = \\ &= 0.7486 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } X_1, \dots, X_{10} \text{ i.i.d. } \sim N(100, 15^2); \quad T = \sum_{i=1}^{10} X_i; \quad T \sim N(1000, 2250) \\ P(T < 1100) &= P\left(Z < \frac{1100 - 1000}{\sqrt{2250}}\right) = P(Z < 2.11) = 0.9826 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } X_1, \dots, X_{100} \text{ i.i.d. } \sim N(100, 225); \quad U = \sum_{i=1}^{100} X_i; \quad U \sim N(10000, 22500) \\ P(U < 11000) &= P\left(Z < \frac{11000 - 10000}{\sqrt{22500}}\right) = P(Z < 6.67) = 1.0000 \end{aligned}$$

d) La probabilità in b) non potrebbe essere calcolata, quella in c) sarebbe 1.0000 (per il T.C.L.).

## ESERCIZIO 7

$$X \sim \text{Poisson}(2), \quad Y \sim \text{Poisson}(3), \quad \rho(X, Y) = -0.8$$

$$\text{a) } P(X=5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4) = 0.0361$$

b) Non sono indipendenti (se lo fossero,  $\rho(X, Y)$  sarebbe 0).

Hanno un'associazione lineare negativa di intensità elevata.

$$\text{c) } \text{cov}(X, Y) = \rho(X, Y) \cdot \sigma(X) \cdot \sigma(Y) = (-0.8) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = -1.9596$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \text{Var}(T) &= \text{Var}(X - 3Y) = \text{Var}(X) + 9 \cdot \text{Var}(Y) - 6 \cdot \text{cov}(X, Y) = \\ &= 2 + 9 \cdot 3 - 6 \cdot (-1.9596) = \\ &= 2 + 27 + 11.7576 = 40.7576 \end{aligned}$$