ESERCIZIO 1

Si effettua un'indagine campionaria volta a stimare la durata media (in minuti) dei pasti di mezzogiorno effettuati dagli studenti di una certa università; si assume un modello gaussiano per descrivere la durata di un pasto. Su un campione di 30 pasti, si rileva una durata media pari a 34 minuti, con uno scarto quadratico medio pari a 5 minuti.

a) Si determini un intervallo di confidenza di livello 0.95 per la durata media del pasto di mezzogiorno degli studenti dell'università.

b) Si determini un intervallo di confidenza di livello 0.99 per la durata media del pasto di mezzogiorno degli studenti dell'università.

c) Si determinino le lunghezze dei due intervalli precedenti.

ESERCIZIO 2

Si vuole stimare il numero medio di chilometri effettuati da un certo modello di automobile nella sua intera vita. Si considera quindi un campione di 20 automobili, del modello in esame, in fase di rottamazione (al termine quindi della loro vita) e si rileva, su ciascuna di esse, il numero di chilometri effettuati; la media di tali valori è 182000, la deviazione standard è 14000. Si assume un modello normale per descrivere il numero di chilometri percorsi.

a) Si determini una stima puntuale del numero medio di chilometri percorsi dalla auto del modello considerato. Si determini quindi lo standard error di tale stima.

b) Si determini un intervallo di confidenza al 90% per il numero medio di chilometri percorsi.

ESERCIZIO 3

Un'azienda che vende online prodotti per animali da compagnia vuole stimare il tempo (in minuti) mediamente trascorso sul sito dagli acquirenti prima di effettuare l'acquisto. Si assume una distribuzione normale per descrivere il tempo trascorso sul sito, con uno scarto quadratico medio pari a 3 minuti. Un campione di 24 acquisti ha fornito un tempo medio trascorso sul sito pari a 17 minuti.

a) Si determini una stima puntuale del tempo mediamente trascorso sul sito dagli acquirenti prima di effettuare l'acquisto. Si determini il corrispondente standard error.

b) Si scriva l'espressione dello stimatore da cui è stata ottenuta la stima precedente. Si dica quindi qual è la distribuzione di tale stimatore.

c) Sulla base della realizzazione campionaria, si determini un intervallo di confidenza al 95% per il tempo mediamente trascorso sul sito dagli acquirenti prima di effettuare l'acquisto. Se ne determini quindi il margine di errore.

ESERCIZIO 4

Per stimare il tempo (in ore di studio) mediamente impiegato dagli studenti di un'università per preparare un certo esame si considera un campione di 16 studenti, che in media hanno impiegato 22 ore di studio; la deviazione standard dei tempi di studio rilevati sui 16 studenti è 4.

a) Si determini un intervallo di confidenza al 99% per il tempo mediamente impiegato dagli studenti dell'università per preparare l'esame. E' necessaria qualche assunzione per determinare tale intervallo?

b) Si consideri l'intervallo determinato al punto precedente. Esso contiene sicuramente il tempo mediamente impiegato dagli studenti dell'università per preparare l'esame? Esso contiene sicuramente il tempo mediamente impiegato dagli studenti del campione? Si giustifichino le risposte.

ESERCIZIO 5

Il tempo di attesa (in minuti) ad uno sportello dei clienti di una banca ha distribuzione normale con varianza pari a 25. Si estrae un campione di 50 clienti e, su questi, si rileva un tempo medio di attesa pari a 7 minuti. Si determini un intervallo di confidenza al 95% per il tempo medio di attesa allo sportello dei clienti della banca.

ESERCIZIO 6

Il tempo (espresso in ore settimanali) di collegamento a internet degli studenti di una certa università si può assumere distribuito in accordo ad una distribuzione normale. Si estrae un campione di 15 studenti; il tempo medio di collegamento a internet rilevato sui 15 studenti è pari a 16, la varianza dei 15 tempi è pari a 26. Si determini un intervallo di confidenza al 99% per il tempo medio di collegamento a internet degli studenti dell’università in esame.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Stiamo considerando il caso di un campione estratto da una popolazione normale, con varianza incognita; i dati rilevati sul campione di $n = 30$ pasti forniscono le realizzazioni $\bar{x} = 34$ e $s = 5$.

a) L'intervallo di confidenza al 95% per la durata media μ del pasto tra tutti gli studenti dell'università è, in questo caso,

$$(\bar{x} - t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}) = (34 - 2.045 * \frac{5}{\sqrt{30}}, 34 + 2.045 * \frac{5}{\sqrt{30}} = (32.133, 35.867)$$

Nell'intervallo precedente è stato determinato il quantile di ordine 0.975 della distribuzione t di Student con 29 gradi di libertà, pari a 2.045.

b) Usando l'espressione generale dell'intervallo vista al punto precedente e considerando il quantile di ordine 0.995 della distribuzione t di Student con 29 gradi di libertà (pari a 2.756) si ottiene l'intervallo al 99% per la media cercata: (31.484, 36.516).

c) Le lunghezze dei due intervalli sono, rispettivamente, 3.734 e 5.032.

ESERCIZIO 2

Stiamo considerando il caso di un campione estratto da una popolazione normale, con varianza incognita; i dati rilevati sul campione di $n = 20$ automobili forniscono le realizzazioni $\bar{x} = 182000$ e $s = 14000$.

a) La stima puntuale del numero medio di chilometri percorsi dalle auto del modello considerato è $\bar{x} = 182000$. Lo standard error di tale stima è $s/\sqrt{n} = 14000/\sqrt{20} = 3130.495$.

b) L'intervallo di confidenza al 90% per il numero medio di chilometri percorsi è

$$(\bar{x} - t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}) = (182000 - 1.729 * \frac{14000}{\sqrt{20}}, 182000 + 1.729 * \frac{14000}{\sqrt{20}} = (176587.4, 187412.6).$$

Nell'intervallo precedente è stato determinato il quantile di ordine 0.95 della distribuzione t di Student con 19 gradi di libertà, pari a 1.729.

ESERCIZIO 3

Stiamo considerando il caso di un campione estratto da una popolazione normale, con varianza nota, pari a $\sigma^2 = 3^2 = 9$; i dati rilevati sul campione di $n = 24$ acquisti ha fornito un tempo medio pari a 17 minuti (ovvero, $\bar{x} = 17$).

a) La stima puntuale del tempo mediamente trascorso sul sito è $\bar{x} = 17$. Lo standard error di tale stima è $\sigma/\sqrt{n} = 3/\sqrt{24} = 0.6124$.

b) Lo stimatore da cui è stata ottenuta la stima precedente è la media campionaria $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_{24})/24$. Tale stimatore ha distribuzione $\mathrm{N}(\mu, 9/24 = 0.375)$, dove μ è il tempo medio trascorso sul sito nell'intera popolazione degli acquirenti.

c) L'intervallo di confidenza al 95% per il tempo mediamente trascorso sul sito è

$$(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (17 - 1.96 * \frac{3}{\sqrt{24}}, 17 + 1.96 * \frac{3}{\sqrt{24}} = (15.7998, 18.2003).$$

Nell'espressione dell'intervallo precedente è presente il quantile di ordine 0.975 della distribuzione normale standard, pari a 1.96.

ESERCIZIO 4

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{16}$ i tempi impiegati dai 16 studenti del campione; la realizzazione di tale campione fornisce una media $\bar{x} = 22$ ed una deviazione standard $s = 4$.

a) Per determinare l'intervallo è necessario assumere la normalità dei tempi, in quanto il campione ha dimensione piccola. L'intervallo al 99% è:

$$(\bar{x} - t^{n-1}_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t^{n-1}_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}) = (22 - 2.947\frac{4}{\sqrt{16}}, 22 + 2.947\frac{4}{\sqrt{16}} = (19.053, 24.947);$$

il quantile 2.947 è quello della distribuzione t di Student con 15 gradi di libertà.

b) Come ogni intervallo di confidenza, non vi è alcuna certezza che includa il valore del parametro incognito (cioè il tempo mediamente impiegato dagli studenti dell'università). Invece include certamente il valore del tempo impiegato dagli studenti del campione, cioè 22 (infatti, l'intervallo di confidenza è centrato in 22).

ESERCIZIO 5

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{50}$ i tempi di attesa dei 50 clienti del campione; in base alle assunzioni, si tratta di variabili aleatorie iid $\sim$ N(μ,25), dove μ è il tempo medio di attesa allo sportello della totalità dei clienti della banca. Dal campione si ottiene la realizzazione $\bar{x} = 7$. L'intervallo al 95% per μ è:

$$(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (7 - 1.96 * \frac{5}{\sqrt{50}}), 7 + 1.96 * \frac{5}{\sqrt{50}} = (5.6141, 8.3859).$$

ESERCIZIO 6

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_{15}$ i tempi di collegamento degli studenti del campione estratto; si tratta di variabili aleatorie iid con distribuzione normale. La realizzazione campionaria fornisce una media $\bar{x} = 16$ ed una varianza $s^2 = 26$. L'intervallo al 99% per il tempo medio di collegamento degli studenti dell'università è:

$$(\bar{x} - t^{14}_{0.005}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t^{14}_{0.005}\frac{s}{\sqrt{n}}) = (16 - 2.977 * \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{15}}, 16 + 2.977 * \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{15}} = (12.0806, 19.9194).$$