ESERCIZIO 1

I dati passati relativi al consumo pro-capite giornaliero di acqua potabile in una regione indicano che mediamente si consumavano 120 litri di acqua al giorno. Per verificare se vi è stato un aumento nel consumo medio (e quindi, in questo caso, adottare misure per aumentare la capacita di fornitura), si rileva il consumo giornaliero su un campione di 200 individui. I dati ottenuti nel campione indicano un consumo medio giornaliero pari a 125 litri con una varianza di 380.
a) Si scrivano ipotesi nulla ed alternativa.
b) Si determini il p-value, precisandone il significato ed il calcolo nel contesto in esame.
c) Usando il p-value calcolato al punto precedente, si stabilisca a livello 0.01 se i dati rilevati sul campione mostrano evidenza che il consumo medio di acqua nella regione sia aumentato.

Soluzione

a) L'ipotesi nulla è H_0: $\mu = 120$, l'ipotesi alternativa è H_1: $\mu > 120$.
b) Il p-value può essere interpretato come la probabilità, calcolata supponendo vera H_0, che la statistica test assuma valori "uguali o più estremi" di quello effettivamente osservato. In questo caso la statistica test è

$$Z = \frac{\bar{X} - 120}{S/\sqrt{200}}$$

che ha, sotto H_0, distribuzione approssimata normale standard in quanto l'ampiezza del campione è elevata. Il valore effettivamente osservato è $z_{oss} = \frac{\bar{x}-120}{s/\sqrt{200}} = \frac{125-120}{\sqrt{380}/\sqrt{200}} = 3.627$ e dunque il p-value è P(Z>3.627)=0.
c) Essendo il p-value minore del livello 0.01, si rifiuta l'ipotesi nulla a questo livello e, quindi, si conclude che c'è evidenza empirica che il consumo medio di acqua sia aumentato.

ESERCIZIO 2

Un'azienda di autonoleggio stabilisce la consistenza ed il ricambio del proprio parco auto sulla base dell'ipotesi, fondata sui dati passati, che mediamente le auto percorrono annualmente 40 (migliaia) di chilometri. Per stabilire se la situazione è oggi cambiata rileva la percorrenza annua in un campione di *9* auto, ottenendo i seguenti valori: media campionaria pari a 42, scarto quadratico medio campionario pari a 10.05. Si utilizzi un test di livello 0.1, giustificando la risposta e precisando le eventuali assunzioni sul modello necessarie per eseguire il test.

Soluzione

E' necessaria l'ipotesi di normalità per il modello in quanto il campione ha dimensione piccola. L' ipotesi nulla è H_0: $\mu = 40$, l'ipotesi alternativa è H_1: $\mu \neq 40$. Si rifiuta dunque l'ipotesi nulla al livello 0.1 se

$$|t_{oss}| \geq t^{8}_{0.05} = 1.86.$$

Poiché
$|t_{oss}| = \left|\frac{\bar{x}-40}{s/3}\right| = \left|\frac{42-40}{10.05/3}\right|. = 0.597 < 1.86,$ non si rifiuta l'ipotesi nulla al livello 0.1. Non vi è dunque sufficiente evidenza empirica per affermare che è cambiata la percorrenza media annua.

ESERCIZIO 3

Una fast-food incassava lo scorso anno, prima dell'inizio di un periodo di recessione economica, una media di 1800 euro al giorno. Per verificare l'eventuale effetto della recessione sulle vendite, si rilevano gli incassi su un campione di 20 giornate, che forniscono una media pari a 1900 ed una deviazione standard pari a 280. Si utilizzi un modello gaussiano per descrivere gli incassi giornalieri.

a) Si utilizzi un test di livello 0.01 per verificare se vi sia stato un qualche effetto della recessione sugli incassi. Si scriva la regione di rifiuto di questo test.
b) Si utilizzi un test di livello 0.01 per verificare se vi sia stato un effetto *positivo* della recessione sugli incassi (perché, ad esempio, vengono maggiormente utilizzati punti di ristoro a basso prezzo).

Soluzione

a) Si tratta del test bilaterale per $H_0 : \mu = 1800$ contro $H_1 : \mu \neq 1800;$ la regione di rifiuto del test di livello 0.01 è

$$R: |T| = \left| \frac{\bar{X} - 1800}{\frac{S}{\sqrt{20}}} \right| > t_{0.005}^{19} = 2.861.$$

Poiché il valore osservato della statistica test è $t_{oss} = \frac{\bar{x} - 1800}{s/\sqrt{20}} = \frac{1900 - 1800}{280/\sqrt{20}} = 1.597$

non si rifiuta l'ipotesi nulla a livello 0.01. Non vi è evidenza empirica sufficiente per stabilire che vi sia stato un qualche effetto sugli incassi.

b) Si tratta del test unilaterale destro (upper tailed test) per le ipotesi $H_0 : \mu = 1800$ (o $\mu \leq 1800$) contro $H_1 : \mu > 1800;$ si rifiuta a livello 0.01 se il valore osservato della statistica test è maggiore di $t_{0.01}^{19} = 2.539.$ Poiché la statistica test ha valore 1.597, non si rifiuta l'ipotesi nulla al livello 0.01; anche in questo caso, non vi è sufficiente evidenza empirica per affermare che vi sia stato un effetto positivo della recessione sugli incassi.

ESERCIZIO 4

La direzione di un grande magazzino valuta, sulla base di informazioni disponibili, che il 3% delle persone che entrano nel magazzino ruba qualche prodotto. Per contrastare questo fenomeno viene assunto del personale di vigilanza. Per valutare se tale provvedimento ha avuto effetti *positivi* (e non rischiare, quindi, che le spese per l'assunzione del personale di vigilanza risultino inutili) si estrae un campione di 600 clienti scelti a caso che vengono controllati; di questi 14 hanno rubato qualche prodotto. Si traggano opportune conclusioni calcolando il p-value corrispondente ai dati osservati.

Soluzione

Le ipotesi riguardano la proporzione p incognita di clienti che rubano, sul totale dei clienti. Le ipotesi sono $H_0: p = 0.03$ contro $H_1: p < 0.03$; si vuole infatti stabilire se il tasso di furti è diminuito con l'assunzione del personale di vigilanza, così da giustificarne i costi. La statistica test è, in questo caso,

$$Z = \frac{\hat{P} - 0.03}{\sqrt{0.03 * 0.97/600}}$$

ed il p-value corrispondente al campione osservato è

$$P(Z \leq z_{oss}) = P\left(Z \leq \frac{0.023 - 0.03}{\sqrt{0.03 * \frac{0.97}{600}}}\right) = P(Z < -1.006) = 0.156;$$

la probabilità è stata calcolata, come sempre, supponendo vera l'ipotesi nulla (cioè assumendo p=0.03). Questo p-value, essendo molto alto (maggiore di ogni livello usuale), porta a non rifiutare l'ipotesi nulla. Non c'è dunque sufficiente evidenza empirica che l'assunzione del personale abbia portato a una riduzione del tasso di furti.