

TRACCIA DI SOLUZIONE

Università C. Cattaneo, Corso di Laurea in Economia Aziendale, A.A. 2016-2017

STATISTICA - 13.07.17 - PROVA GENERALE

FREQUENTANTE (SVOLTO ASSIGNMENT): SI NO

(A) ai fini della valutazione verranno considerate solo le risposte riportate dallo studente negli appositi riquadri bianchi: in caso di necessità si può anche andare fuori dai margini che delimitano i riquadri.
(B) nello svolgimento del compito si utilizzino tre cifre decimali.

COGNOME.....NOME.....MATR.....

ESERCIZIO 1 (punti 7.5). Una variabile X ha distribuzione Binomiale con parametri 4 e 0.2; una variabile Y, indipendente da X, ha funzione di probabilità data dalla tabella che segue:

valore y di Y	probabilità P(Y=y)
0	0.3
2	0.4
3	0.2
4	0.1

- a) Si calcoli la probabilità che X sia minore di 2.
 b) Si calcoli la probabilità che Y sia maggiore o uguale a 1.
 c) Si calcoli lo scarto quadratico medio di Y.
 d) Si calcoli la probabilità che S=X-Y sia uguale a 0.
 e) Si calcoli il valore atteso di T=Y-3X+1.
 f) Si calcoli la varianza di T.
 g) Si calcoli la probabilità che, congiuntamente, X sia minore di 3 e Y sia uguale a 3.

$$a) P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{4!}{0!4!} (0.2)^0 (0.8)^4 + \frac{4!}{1!3!} (0.2)^1 (0.8)^3 = 0.4096 + 0.4096 = 0.8192$$

$$b) P(Y \geq 1) = 0.4 + 0.2 + 0.1 = 0.7$$

$$c) SQM(Y) = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{0^2 \cdot 0.3 + 4^2 \cdot 0.4 + 9^2 \cdot 0.2 + 16^2 \cdot 0.1} - (1.8)^2 = \sqrt{5 - 3.24} = \sqrt{1.76} = 1.327$$

$$d) P(S=0) = P(X-Y=0) = P(X=Y) = P(X=0, Y=0) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=3) + P(X=4, Y=4) = (0.8)^4 \cdot (0.3) + \left(\frac{4!}{2!2!} (0.2)^2 (0.8)^2\right) \cdot (0.4) + \left(\frac{4!}{3!1!} (0.2)^3 (0.8)\right) (0.2) + \left(\frac{4!}{4!0!} (0.2)^4 (0.8)^0\right) (0.1) = 0.123 + 0.061 + 0.005 + 0.0002 = 0.189$$

$$e) E(T) = E(Y-3X+1) = E(Y) - 3E(X) + 1 = 1.8 - 3(0.8) + 1 = 0.4$$

$$f) Var(T) = Var(Y-3X+1) = Var(Y) + 9Var(X) = 1.76 + 9 \cdot 0.64 = 7.52$$

$$g) P(X < 3, Y=3) = P(X < 3) \cdot P(Y=3) = [1 - P(X=3) - P(X=4)] \cdot P(Y=3) = \left[1 - \frac{4!}{3!1!} (0.2)^3 (0.8)^1 - \frac{4!}{4!0!} (0.2)^4 (0.8)^0\right] \cdot (0.2) = (0.973) (0.2) = 0.195$$

Università C. Cattaneo, Corso di Laurea in Economia Aziendale, A.A. 2016-2017

ESERCIZIO 2 (punti 8). Uno studente viene sottoposto a due prove d'esame, A e B. Il punteggio ottenuto nella prova A è descritto mediante una distribuzione normale di media 60 e varianza 100, il punteggio della prova B è descritto mediante una distribuzione normale con media 30 e varianza 16. La covarianza tra i punteggi delle due prove è pari a 20.

- Si calcoli la probabilità che il punteggio ottenuto nella prova A sia maggiore di 70.
- Si calcoli il quantile di ordine 0.85 del punteggio ottenuto nella prova A.
- Si calcoli il valore atteso del punteggio totale ottenuto dallo studente (dato dalla somma dei punteggi di A e B).
- Si calcoli lo scarto quadratico medio del punteggio totale.

$$X = \text{punteggio A}; Y = \text{punteggio B}; X \sim N(60, 100), Y \sim N(30, 16) \\ \text{cov}(X, Y) = 20$$

$$a) P(X > 70) = P\left(Z > \frac{70 - 60}{10}\right) = P(Z > 1) = 1 - 0.8413 = \boxed{0.1587}$$

$$b) P(X < q_{0.85}) = 0.85, \text{ ovvero } P\left(Z < \frac{q_{0.85} - 60}{10}\right) = 0.85 \Rightarrow \\ \frac{q_{0.85} - 60}{10} = z_{0.85} = 1.04 \Rightarrow q_{0.85} = (1.04) \cdot 10 + 60 = \boxed{70.4}$$

$$c) T = X + Y = \text{punteggio totale}$$

$$E(T) = E(X) + E(Y) = 60 + 30 = \boxed{90}$$

$$d) \sigma(T) = \sqrt{V_{\text{cov}}(T)} = \sqrt{100 + 16 + 2 \cdot 20} = \sqrt{156} = \\ = \boxed{12.49}$$

Università C. Cattaneo, Corso di Laurea in Economia Aziendale, A.A. 2016-2017

ESERCIZIO 3 (punti 4) Si è interessati ad analizzare il tempo settimanale medio speso online nell'utilizzo di social network da parte di studenti delle scuole superiori. A tale scopo si estrae un campione di 150 studenti frequentanti le scuole superiori e si osserva un tempo settimanale medio di utilizzo di social network pari a 10 ore e una deviazione standard pari a 2.

- a) Si determini un intervallo di confidenza al 99% per il tempo medio settimanale speso nell'utilizzo di social network.
b) Si può concludere, al livello di significatività del 5%, che il tempo medio suddetto è maggiore di 9 ore? Si giustifichi la risposta.

$$n=150, \bar{x}=10, s=2$$

$$a) \left(\bar{x} - 2.576 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.576 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right) = \left(10 - 2.576 \cdot \frac{2}{\sqrt{150}}, 10 + 2.576 \cdot \frac{2}{\sqrt{150}} \right) = (9.579, 10.421)$$

$$b) \begin{cases} H_0: \mu = 9 \\ H_1: \mu > 9 \end{cases} \quad R_{0.05}: Z = \frac{\bar{x} - 9}{\frac{s}{\sqrt{n}}} > 1.645$$

$$Z_{0.05} = \frac{10 - 9}{\frac{2}{\sqrt{150}}} = 6.124 > 1.645 \quad \text{SI RIFIUTA } H_0$$

A LIVELLO 0.05; C'È EVIDENZA CHE IL TEMPO MEDIO È MAGGIORE DI 9

ESERCIZIO 4 (punti 6). Attraverso la rilevazione su un campione di 12 pacchi, si vuole stimare il peso medio dei pacchi complessivamente trattati da un corriere. I dati relativi al campione forniscono un peso medio pari a 850 grammi, con uno scarto quadratico medio (o deviazione standard) pari a 120 grammi. Si assume che il peso dei pacchi abbia distribuzione normale.

- a) È indispensabile l'assunzione di normalità relativa al peso dei pacchi? Si giustifichi la risposta.
b) Si determini un intervallo di confidenza al 95% per il peso medio dei pacchi complessivamente gestiti dal corriere.
c) Si verifichi, a livello 0.01, se il peso medio dei pacchi è diverso da 800 grammi.

$$n=12, \bar{x}=850, s=120 \quad X=\text{peso}; X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

a) È indispensabile per determinare intervalli di conf. o effettuare test, in quanto n è piccolo.

$$b) \left(\bar{x} \pm t_{0.975, 11} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right) = \left(850 \pm 2.201 \cdot \frac{120}{\sqrt{12}} \right) = (850 \pm 76.245) = (773.755, 926.245)$$

$$c) \begin{cases} H_0: \mu = 800 \\ H_1: \mu \neq 800 \end{cases} \quad R_{0.01}: \left| T \right| = \left| \frac{\bar{x} - 800}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right| > 3.106 (= t_{0.995, 11})$$

$$|T_{0.01}| = \left| \frac{850 - 800}{\frac{120}{\sqrt{12}}} \right| = 1.443 < 3.106 \quad \text{NON SI RIFIUTA } H_0$$

A LIVELLO 0.01; NON C'È EVIDENZA CHE $\mu \neq 800$

ESERCIZIO 5 (punti 1.5)

Per i valori x della variabile X (riportati nella prima colonna a sinistra nella tabella qui sotto) ed i valori y della variabile Y (riportati nella prima riga in alto della stessa tabella) si sono rilevate le frequenze assolute congiunte riportate nella stessa tabella.

	Y	4	5	6	7
X	0	20	5		5
1					10
2	5				5
3	5	5	10		30

Mostrando i calcoli principali, si risponda alle seguenti domande:

- si determini il quarto decile della variabile Y .
- si determini la frequenza relativa delle coppie (x, y) di valori delle due variabili con x compreso fra 1 e 2 (inclusi) e con $y = 4$.
- si determinino media e varianza della variabile Y .
- si determini la covarianza delle variabili X e Y .

$$a) F_Y(Y \leq 5) = 40/100 = 0.4 \quad \text{quarto decile} = 5$$

↑
FREQ. RELAT.

$$b) F_{XY}(1 \leq X \leq 2, Y=4) = 5/100 = 0.05$$

$$c) \text{media}(Y) = \frac{4 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 50}{100} = 5.8$$

$$\text{varianza}(Y) = \frac{16 \cdot 30 + 25 \cdot 10 + 36 \cdot 10 + 49 \cdot 50}{100} - (5.8)^2 =$$

$$= 35.4 - 33.64 = 1.76$$

$$d) \text{cov}(X, Y) = \frac{(2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 5 + 1 \cdot 7 \cdot 10 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \cdot 10 + 3 \cdot 7 \cdot 30)}{100} - (5.8 \cdot 1.8) =$$

$$= 11.25 - 10.44 = 0.81$$

Università C. Cattaneo, Corso di Laurea in Economia Aziendale, A.A. 2016-2017

ESERCIZIO 6 (punti 3) [SOLO PER STUDENTI NON FREQUENTANTI, CHE NON HANNO SVOLTO CIOE' L'ASSIGNMENT NELL'ANNO 2016-2017]

Attraverso un modello di regressione lineare, si vuole studiare la dipendenza del fatturato mensile (y) dall'investimento pubblicitario (x), con riferimento ad aziende di un certo settore. Sulla base di un campione di 90 aziende, si ottiene la seguente equazione stimata del modello:

$$\hat{y} = 0.4x + 35$$

a) Si preveda il fatturato medio delle aziende con investimento pubblicitario pari a 10.

b) Si descriva brevemente l'effetto dell'investimento pubblicitario sul fatturato medio (assumendo che tale effetto sia significativo).

$$\hat{y} = (0.4)x + 35$$

a) PREVISIONE = $(0.4) \cdot 10 + 35 = 40$

b) Ad un incremento unitario dell'investimento pubblicitario è associato, in media, un incremento del fatturato pari a 0.4.