

Esercizi Intervalli di Confidenza I

ESERCIZIO 1

X = numero di passeggeri giornaliero

X_1, X_2, \dots, X_7 campione estratto da X

47, 66, 55, 53, 49, 65, 50 realizzazioni del campione

a. Stima puntuale

$$\bar{x} = \frac{47 + 66 + \dots + 50}{7} = 55$$

b. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con μ, σ incogniti.

L'intervallo al 99% è

$$\left(\bar{x} - t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

dove

$$\bar{x} = 55 \quad n = 7 \quad t_{\alpha/2}^{n-1} = t_{0,005}^6 = 3,71$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(47-55)^2 + \dots + (50-55)^2}{6}} = 7,64$$

Quindi l'intervallo è

$$\left(55 - 3,71 \frac{7,64}{\sqrt{7}}; 55 + 3,71 \frac{7,64}{\sqrt{7}} \right) = (55 - 10,71; 55 + 10,71) = (44,29; 65,71)$$

ESERCIZIO 2

X = tempo esecuzione test,

X_1, \dots, X_{60} campione ($n = 60$ è sufficientemente grande, quindi $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$)

L'intervallo è

$$\left(\bar{x} \mp z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right) = \left(12 - 1,96 \sqrt{\frac{15}{60}}; 12 + 1,96 \sqrt{\frac{15}{60}} \right) = (12 - 0,98; 12 + 0,98) = (11,02; 12,98)$$

ESERCIZIO 3

X = durata telef. nella fascia considerata

X_1, \dots, X_{1200} (n quindi grande, quindi \bar{X} si può approssimare alla normale)

Realizzazione campionaria: $x = 4,7$, $s^2 = 4,5$

Intervallo al 90%:

$$(4,7 - 1,645\sqrt{\frac{4,5}{1200}}; 4,7 + 1,645\sqrt{\frac{4,5}{1200}}) = (4,7 - 0,1; 4,7 + 0,1) = (4,6; 4,8)$$

Intervallo al 95%:

$$(4,7 - 1,96\sqrt{\frac{4,5}{1200}}; 4,7 + 1,96\sqrt{\frac{4,5}{1200}}) = (4,7 - 0,12; 4,7 + 0,12) = (4,58; 4,82)$$

Intervallo al 99%:

$$(4,7 - 1,96\sqrt{\frac{4,5}{1200}}; 4,7 + 2,575\sqrt{\frac{4,5}{1200}}) = (4,54; 4,86)$$

ESERCIZIO 4

X = spesa mensile

X_1, \dots, X_{20} campione

$$\bar{x} = 820, \quad s = 156, \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Intervallo al 95%:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{\alpha/2}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} = (820 - 2,09 \frac{156}{\sqrt{20}}, 820 + 2,09 \frac{156}{\sqrt{20}}) = (820 - 72,9; 820 + 72,9) = (747,1; 892,9)$$

ESERCIZIO 5

X = durata pneumatici;

X_1, \dots, X_{15} campione

$$\bar{x} = 37500 \quad X \sim (\mu, 4000^2)$$

a. $(x - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; x + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (37500 - 1,96 \frac{4000}{\sqrt{15}}; 37500 + 1,96 \frac{4000}{\sqrt{15}}) = (37500 - 2024,28; 37500 + 2024,28) = (35475,72; 39524,28)$

b. La lunghezza dell'intervallo precedente è $L = 4048,56$. Quindi la lunghezza desiderata è $\frac{L}{2} = 2024,28$. Poichè la lunghezza di un intervallo al 95% per la media di una popolazione normale con varianza nota è per un campione di ampiezza n $w = \frac{2z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15680}{\sqrt{n}}$

Quindi n deve soddisfare la disequazione

$$\frac{15680}{\sqrt{n}} \leq 2024,28$$

$$\text{cioè } n \geq 59,99 \quad n \geq 60$$

Bisogna dunque campionare almeno 60 pneumatici.

ESERCIZIO 6

$X = 1$ vota

$X = 0$ non vota

$X \sim \text{Bern}(\theta)$

θ = proporzione di elettori, sul totale, che votano.

X_1, \dots, X_{800} campione da X

$$\hat{p} = \frac{\sum x_i}{800} = \frac{352}{800} = 0,44 \text{ prop. campionaria}$$

Intervallo di confidenza per θ , al 99%

$$(0,44 \mp 2,576 \sqrt{\frac{0,44 \cdot 0,56}{800}}) = (0,44 - 0,045; 0,44 + 0,045) = (0,395; 0,485)$$

Quindi, con "fiducia" pari al 99% (quindi molto alta) la "vera" percentuale di coloro che voteranno è compresa tra il 39,5% ed il 48,5%, per cui al di sotto del 50%. Quindi l'affermazione è ragionevole, anche se ovviamente, non è affatto certo che il referendum non raggiunga il quorum.

Se $\hat{p} = \frac{395}{800} = 0,49375$, allora un qualunque intervallo di livello standard (0,90; 0,95; 0,99) contiene 0,5; ad esempio, il più corto (al 90%) è (0,465; 0,523), quindi l'affermazione non sarebbe ragionevole.

ESERCIZIO 7

$X \sim \text{Bern}(\theta)$, θ = prop. giovani che vanno a teatro almeno una volta

X_1, \dots, X_{200} campione

$$\hat{p} = \frac{18}{200} = 0,09$$

Intervallo al 90%

$$(x \mp z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{x}(1-\hat{x})}{n}}) = (0,09 \mp 1,645 \sqrt{\frac{0,09 \cdot 0,91}{200}}) = (0,057; 0,123)$$

ESERCIZIO 8

$X \sim \text{Bern}(\theta)$ θ = prop. studenti che ripetono la scelta

X_1, \dots, X_{90} campione (numero sufficientemente grande per appross. normale)

$$\hat{p} = \frac{52}{90} = 0,578$$

Poichè l'intervallo per θ al 90% è (0,492; 0,664) e, quindi, contiene 0,5 (e a maggior ragione contengono 0,5 gli intervalli al 90% e 95%), è ragionevole ipotizzare che la metà del totale degli iscritti ripeterebbe la scelta.

ESERCIZIO 9

$X = \text{spesa pasto } X \sim N(\mu, 0, 8^2)$

X_1, \dots, X_{20} campione

a. $\bar{x} = 5,3$ intervallo al 90%

$$(\bar{x} \mp z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (5,3 \mp 1,645 \frac{0,8}{\sqrt{20}}) = (5,01; 5,59)$$

b. Sì, possono esserci intervalli che non contengono μ , in percentuale sono il 10%, cioè circa 80000, in quanto l'intervallo è al 90% e, quindi, la probabilità di estrarre un campione per il quale l'intervallo corrispondente non contiene μ è 0,1.

ESERCIZIO 10

$X \sim \text{Bern}(\theta)$, $\theta = \text{prop. CD difettosi}$

a. $\hat{p} = \frac{12}{300} = 0,04$

b. No, non si può basare una decisione riguardante il parametro incognito θ basandosi esclusivamente sulla stima puntuale, che dipende dal campione osservato.

c. L'intervallo è (0,012; 0,068)