Università C. Cattaneo, Corso di Laurea in Economia Aziendale, A.A. 2015-2016
STATISTICA – 22.06.2016 - PROVA GENERALE STANDARD

(A) ai fini della valutazione verranno considerate **solo** le risposte riportate dallo studente **negli appositi riquadri** bianchi: in caso di necessità **si può anche andare fuori dai margini che delimitano i riquadri.**
(B) nello svolgimento del compito si utilizzino almeno tre cifre decimali.

COGNOME…………………………NOME………………………..MATR………………..

ESERCIZIO 1 (2 punti)
Il numero di scosse di terremoto che vengono registrate annualmente da un sismografo è distribuito in accordo ad una distribuzione di Poisson con media 3.2.
a) Si determini la probabilità che in un anno vengano registrate meno di 4 scosse.
b) Si determini la probabilità che in 6 mesi (1/2 anno) vengano registrate tra 1 (escluso) e 3 (incluso) scosse.

a) X = numero scosse in un anno ; $X \sim \text{Poisson}(3.2)$
$P(X<4) = P(X \leq 3) = 0.603$
b) Y = numero scosse in 6 mesi ; $Y \sim \text{Poisson}(1.6)$
$P(1 < Y \leq 3) = P(Y \leq 3) - P(Y \leq 1) = 0.921 - 0.525 = 0.396$

ESERCIZIO 2 (6 punti)
Il rendimento di un portafoglio è determinato per il 30% da un titolo A, per il resto da un titolo B. Il rendimento del titolo A ha media 0.01 e scarto quadratico medio 0.01; il rendimento di B ha media 0.02 e scarto quadratico medio 0.02.
a) Si determini il rendimento medio del portafoglio.
b) Si determini lo scarto quadratico medio del rendimento del portafoglio, sapendo che i rendimenti di A e B hanno coefficiente di correlazione lineare pari a 0.4.
c) Assumendo che il rendimento del portafoglio abbia distribuzione normale, si calcoli la probabilità che tale rendimento sia negativo.
d) Sempre assumendo che il rendimento del portafoglio abbia distribuzione normale, si determini il quantile di ordine 0.8 di tale rendimento.

X = rend. A ; $E(X) = 0.01$, $Var(X) = (0.01)^2$ | $R = (0.3)X + (0.7)Y$
Y = rend. B ; $E(Y) = 0.02$, $Var(Y) = (0.02)^2$

a) $E(R) = (0.3)(0.01) + (0.7)\cdot(0.02) = 0.017$

b) $\sigma(R) = \sqrt{Var(R)} = \sqrt{(0.3)^2 \cdot (0.01)^2 + (0.7)^2 (0.02)^2 + 2\cdot(0.3)\cdot(0.7)\cdot(0.4)(0.01)\cdot(0.02)} = 0.0154$

$R \sim N(0.017, 0.0154)$

c) $P(R<0) = P\left(Z < \frac{0-0.017}{0.0154}\right) = P(Z < -1.104) = 1 - 0.8643 = 0.1357$

d) $P(R \leq q_{0.8}) = 0.8 \Rightarrow P\left(Z < \frac{q_{0.8} - 0.017}{0.0154}\right) = 0.8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{q_{0.8} - 0.017}{0.0154} = 0.84 \Rightarrow q_{0.8} = 0.0299$

Università C. Cattaneo, Corso di Laurea in Economia Aziendale, A.A. 2015-2016

ESERCIZIO 3 (punti 6) Siano X e Y variabili aleatorie con distribuzione congiunta assegnata dalla seguente tabella a doppia entrata:

X \ Y	-1	0	1
-1	0	0.40	0.20
1	0.30	0.10	0

a) Si calcoli il coefficiente di correlazione lineare tra X e Y.
b) Si determini la funzione di probabilità della variabile aleatoria $T=X^2$.
c) Si determinino il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria U=X-Y+1.

a) $cov(X,Y) = (-0.2-0.3) - (-0.6+0.4)(-0.3+0.2) = -0.52$

$Var(Y) = (0.6+0.4) - (-0.6+0.4)^2 = 1 - 0.04 = 0.96$

$Var(X) = (0.3+0.2) - (-0.3+0.2)^2 = 0.5 - 0.01 = 0.49$

$\rho(X,Y) = \dfrac{-0.52}{\sqrt{0.96 \cdot 0.49}} = -0.758$

b) $S_T = \{0,1\}$ $\quad p_T(t) = \begin{cases} 0.5 & t=0,\ t=1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

c) $E(U) = E(X) - E(Y) + 1 = (-0.3+0.2) - (-0.6+0.4) + 1 = 1.1$

$Var(U) = Var(X) + Var(Y) - 2cov(X,Y) =$

$= 0.96 + 0.49 + 1.04 = 2.49$

ESERCIZIO 4 (punti 3). Il ritardo (in minuti) di un treno su un certo percorso si assume distribuito in accordo ad una distribuzione normale. Si consideri un campione di 12 viaggi del treno in esame; il ritardo medio rilevato sui 12 viaggi è pari a 11, lo scarto quadratico medio dei 12 viaggi è pari a 2. Si verifichi, a livello 0.01, se il ritardo medio su tutti i viaggi compiuti dal treno sul percorso in esame è minore di 12.

X = ritardo, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $X_1, \dots, X_{12}$ $\to \bar{x} = 11$, $\to s = 2$

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 12 \\ H_1: \mu < 12 \end{cases} \qquad R_{0.01}: T = \frac{\bar{X} - 12}{S/\sqrt{12}} \leq -t^{11}_{0.01} = -2.718$$

$$T_{oss} = \frac{11-12}{2/\sqrt{12}} = -1.732 \not\leq -2.718$$, quindi non si rifiuta H_0; non c'è evidenza che il ritardo medio sia minore di 12.

ESERCIZIO 5 (punti 5). Attraverso un'indagine campionaria si vuole analizzare la proporzione di studenti di una università che è pentita della scelta fatta. Su un campione di 200 studenti, 33 si dicono pentiti.

a) Si determini una stima puntuale per la proporzione di studenti dell'università in esame pentiti della scelta.
b) Si determini un intervallo di confidenza al 95% per la proporzione specificata al punto precedente.
c) Si verifichi al livello 0.05 se la proporzione di studenti dell'università in esame pentiti è diversa da 0.15.

$X = \begin{cases} 0 & \text{non pentito} \\ 1 & \text{pentito} \end{cases}$ $X \sim Bern(p)$ $X_1, \dots, X_{200} \to \bar{x} = \frac{33}{200} = 0.165$

a) stima $\to \bar{x} = 0.165$

b) $$\left(\bar{x} - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{200}}, \bar{x} + 1.96\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{200}}\right) = (0.1136, 0.2164)$$

c) $$\begin{cases} H_0: p = 0.15 \\ H_1: p \neq 0.15 \end{cases} \qquad R_{0.05}: |Z| = \left| \frac{\bar{X} - 0.15}{\sqrt{\frac{(0.15)(0.85)}{200}}} \right| \geq z_{0.025} = 1.96$$

Poiché $$|Z_{oss}| = \left| \frac{0.165 - 0.15}{\sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{200}}} \right| = 0.5941 \not\geq 1.96$$, non si rifiuta H_0 (non c'è evidenza che la proporzione sia diversa da 0.15)

Università C. Cattaneo, Corso di Laurea in Economia Aziendale, A.A. 2015-2016

ESERCIZIO 6 (punti 4) Un campione di 100 unità da una popolazione con media (incognita) μ e varianza incognita fornisce una media pari a 28 ed una varianza pari a 5. Si vuole verificare l'ipotesi nulla $H_0: \mu=30$ contro $H_1: \mu<30$.

a) Si determini il p-value corrispondente al campione osservato.

b) Sulla base del p-value calcolato, si stabilisca se rifiutare o meno l'ipotesi nulla al livello 0.05.

$$\begin{cases} H_0: \mu = 30 \\ H_1: \mu < 30 \end{cases} \qquad X_1, \dots, X_{100} \to \bar{x} = 28, \; s^2 = 5$$

a) $$\text{p-value} = P(Z \leq Z_{OSS}) = P\left(Z \leq \frac{28-30}{\sqrt{5}/\sqrt{100}}\right) =$$

$$= P(Z \leq -8.944) \simeq 0$$

(Z ha distribuzione ~~esattamente~~ appross. normale standard)

b) poiché p-value $\simeq 0 < 0.05$, si rifiuta H_0 (c'è evidenza che $\mu < 30$).