ESERCIZIO 1

I prezzi (in migliaia di euro) degli appartamenti trilocali di una città hanno valore medio pari a 500 e scarto quadratico medio pari a 120; sono inoltre ben descritti da una distribuzione normale. Si estrae un campione di 80 appartamenti.
a) Si calcoli la probabilità che il primo degli appartamenti estratti per formare il campione abbia prezzo minore di 480.
b) Si calcoli la probabilità che il secondo degli appartamenti estratti per formare il campione abbia prezzo compreso tra 480 e 520.
c) Si calcoli la probabilità che il prezzo medio degli 80 appartamenti che formano il campione sia minore di 480.
d) Si calcoli la probabilità che il prezzo medio degli 80 appartamenti che formano il campione sia compreso tra 480 e 520.
e) Se non si ponesse l'ipotesi di normalità dei prezzi, cosa si potrebbe dire delle probabilità richieste in a), b), c) e d)?
f) Sotto l'ipotesi di normalità dei prezzi, si calcolino il III quartile del prezzo del singolo appartamento ed il III quartile del prezzo medio degli 80 appartamenti del campione. A cosa è legata la differenza tra questi due valori?

Soluzione

X=prezzo degli appartamenti trilocali di una città
$X \sim N(500, 120^2)$
Campione: $X_1, X_2, ..., X_{80}$ $n = 80$ iid $N(500, 120^2)$

a) $P(X_1 < 480) = P(Z < \frac{480-500}{120}) = P(Z < -0,167) = 1 - 0,566 = 0,434$

b) $P(480 < X_2 < 520) = P(\frac{480-500}{120} < Z < \frac{520-500}{120}) = P(-0,167 < Z < 0,167) = 0,132$

c) $\overline{X} = \frac{1}{80}\sum_{i=1}^{80} X_i \sim N(500, \frac{120^2}{80} = 180)$; quindi $P(\overline{X} < 480) = P(Z < \frac{480-500}{\sqrt{180}}) = P(Z < -1,49) = 0,068$

d) $P(480 < \overline{X} < 520) = P(\frac{480-500}{\sqrt{180}} < Z < \frac{520-500}{\sqrt{180}}) = P(-1,49 < Z < 1,49) = 0,864$

e) Le probabilità in a) e b) potrebbero essere molto diverse, quelle in c) e d) sarebbero approssimativamente le stesse, in base al teorema centrale del limite.

f) Per il terzo quartile del prezzo del singolo appartamento, cerchiamo $k \in R$ tale che $P(X_1 < k) = 0,75$, ovvero $P(\frac{X_1-500}{120} < \frac{k-500}{120}) = 0,75$, ovvero $P(Z < \frac{k-500}{120}) = 0,75$, cioè $(k - 500)/120 = 0.67$, per cui $k = 580.4$
Analogamente, il terzo quartile di $\overline{X}$ è $500+\sqrt{180}0.67 = 508.99$. La differenza è dovuta alle varianze diverse di $\overline{X}$ e X_1 (molto maggiore quella di X_1.

ESERCIZIO 2

Ad un campione di 300 persone che hanno visto un determinato film viene chiesto di dichiarare se il

film è piaciuto oppure no.
a) Se la probabilità che ad un generico spettatore il film sia piaciuto è pari a 0.4, qual è la probabilità che la percentuale di persone nel campione cui è piaciuto il film sia maggiore del 45%?
b) Se la probabilità che ad un generico spettatore il film sia piaciuto è pari a 0.4, qual è la probabilità che il film sia piaciuto a meno di 100 persone (sulle 300 intervistate)?

Soluzione

$X = 1$ il film è piaciuto
$X = 0$ il film non è piaciuto
$X \sim Bern(p)$, $X_1, X_2, ..., X_{300}$ campione da Bern(p)

a) Se $p = 0,4$
$P(\bar{X} > 0,45) = P(\frac{\bar{X}-0,4}{\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{300}}} > \frac{0,45-0,4}{\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{300}}}) = P(Z > 1,768) = 1 - 0,962 = 0,038.$

b) Se $p = 0,4$, $P(T < 100) = P(Z < \frac{100-120}{\sqrt{72}}) = P(Z < -2,36) = 0,009$, dove $T = X_1 + \ldots + X_{300} \approx N(120, 72)$.

ESERCIZIO 3

Per descrivere il prezzo di vendita di un certo articolo nei negozi di una regione si utilizza, come modello, una distribuzione gaussiana, con varianza pari a 40 ($euro^2$). Si è interessati a stimare il prezzo medio di vendita, non noto. A questo scopo, si considera un campione di 10 negozi della regione.
a) Se il prezzo medio dell'articolo nell'intera regione fosse pari a 40 euro, quale sarebbe la probabilità che la media dei prezzi rilevati nei 10 negozi del campione sia minore di 38 euro?
b) Se il prezzo medio nell'intera regione fosse invece 50 euro, quale sarebbe la probabilità richiesta al punto precedente?
c) Nei 10 negozi che costituiscono il campione, si rilevano i seguenti prezzi: 37,38,42,32,38,40,40,36,36,31. Alla luce di questi dati, è realistica l'ipotesi che il prezzo medio di vendita nell'intera regione sia 50 euro?

Soluzione

X= prezzo articolo, $X \sim N(\mu, 40)$
$X_1, X_2, ..., X_{10}$ campione da $N(\mu, 40)$; $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{40}{10} = 4)$.

a) Se $\mu = 40$, $P(\overline{X} \leq 38) = P(Z \leq \frac{38-40}{2}) = P(Z \leq -1) = 0,159$

b) Se $\mu = 50$

$$P(\overline{X} \leq 38) = P(Z \leq \frac{38-50}{2}) = P(Z \leq -6) \simeq 0$$

c) Dai dati si ricava $\overline{x} = 37$. L'ipotesi $\mu = 50$ è molto poco plausibile, perchè sotto di essa la probabilità di osservare $\overline{X} \leq 38$ è praticamente nulla (ed è stato invece osservato il valore 37).

ESERCIZIO 4

Le uova prodotte in un allevamento hanno peso con varianza pari a 2. Il produttore dichiara che, in media, le uova prodotte nel proprio allevamento hanno peso medio pari a 72 grammi. Per verificare tale dichiarazione, si estrae un campione di 300 uova, il peso medio delle quali è 69.
a) Si calcoli la probabilità che il peso medio delle 300 uova del campione sia minore di 70 grammi, supponendo vera l'affermazione del produttore sul peso medio.
b) E' da respingere l'affermazione del produttore, alla luce dei dati rilevati sul campione di 300 uova?

Soluzione

X=peso uova

$E(X) = \mu$, $Var(X)$=2

Ipotesi dichiarata: $\mu = 72$

$X_1, ..., X_{300}$ campione; $\overline{X} \sim N(72, 2/300 = 0.0067)$ se l'ipotesi è vera. La realizzazione campionaria fornisce $\overline{x} = 69$.

a) Se $\mu = 72$, $P(\overline{X} < 70) = P(Z < \frac{70-72}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{300}}}) = P(Z < -24, 49) \simeq 0$

b) L'affermazione è estremamente implausibile, perchè sotto l'ipotesi $\mu = 72$ la probabilità di $\overline{X} < 70$ è praticamente nulla (e si è osservato $\overline{x} = 69$)

ESERCIZIO 5

Su un campione di 8 studenti, si rileva il tempo (in minuti) dedicato quotidianamente all'ascolto della musica; si utilizzi la distribuzione gaussiana, con varianza pari a 400, come modello per descrivere il tempo di ascolto giornaliero di musica. Il tempo medio di ascolto giornaliero μ, nell'intera popolazione di studenti, è invece incognito.
a) Si calcoli la probabilità che il tempo medio di ascolto degli 8 studenti che costituiscono il campione differisca da μ per meno di 30 minuti.
b) Se la rilevazione campionaria fornisce i valori 40,60,120,80,90,90,240,180, è plausibile uno valore di μ pari a 150 minuti? Si giustifichi la risposta.

Soluzione

X= tempo ascolto, $X_1, ..., X_8$ campione da $N(\mu, 400)$. Quindi:
$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{400}{8} = 50)$

a) $P(|\overline{X} - \mu| < 30) = P(\mu - 30 < \overline{X} < \mu + 30) = P(-4.24 < Z < 4,24) \simeq 1$.

b) Dai dati si ottiene la realizzazione $\overline{x} = 112,5$. Sulla base di a), $\bar{X}$ differisce da μ con probabilità praticamente uguale a 1 per meno di 30; poichè $\mu = 150$ differisce da $112,5$ per più di 30, l'ipotesi $\mu = 150$ non è plausibile.