<u>ESERCIZIO</u> 1 Il numero di accessi ad un Pronto Soccorso ha distribuzione di Poisson; in un quarto d'ora vi sono mediamente 6 accessi.
a) Si calcoli la probabilità che in un quarto d'ora vi siano più di 4 accessi.
b) Si calcoli la probabilità che in cinque minuti vi siano non più di 3 accessi.
c) Ogni accesso al Pronto Soccorso ha, per l'ospedale, un costo pari a 50 €. Si calcolino il valore atteso e la varianza del costo totale sostenuto dall'ospedale in un quarto d'ora.

<u>ESERCIZIO 2</u> Un prodotto tecnologico viene dato in prova per un mese a 7 consumatori, che possono trattenerlo (pagandolo) o restituirlo. La probabilità che il prodotto venga restituito è 0.33.
a) Si calcoli la probabilità che un solo consumatore tra i 7 restituisca il prodotto.
b) Si calcoli la probabilità che meno di 5 consumatori restituiscano il prodotto.
c) Il danno subito dal produttore per ogni unità di prodotto restituita è quantificabile in 20 €. Si calcolino la media e la varianza del danno totale.

<u>ESERCIZIO</u> 3 Si consideri un portafoglio il cui rendimento annuo è dato per il 30% da un titolo A, per il 20% da un titolo B, per il 50% da un titolo C. Il rendimento di A ha distribuzione normale con media 0.03 e scarto quadratico medio 0.02, il rendimento di B ha media 0.07 e scarto quadratico medio 0.01, il rendimento di C ha media 0.08 e scarto quadratico medio 0.04. Inoltre, i rendimenti di A e B hanno coefficiente di correlazione lineare nullo, quelli di A e C hanno coefficiente di correlazione lineare 0.3, quelli di B e C hanno covarianza 0.0002.
a) Si calcoli la probabilità che il rendimento di A sia maggiore di 0.05.
b) Si determini il quantile di ordine 0.72 del rendimento di A.
c) Si determini il valore atteso del rendimento del portafoglio.
d) Si determini lo scarto quadratico medio del rendimento del portafoglio.
e) I rendimenti di A e B sono indipendenti? Si giustifichi la risposta.

<u>ESERCIZIO 4</u> Si considerino 200 pacchi, i cui pesi sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con media 1300 grammi e scarto quadratico medio 430 grammi.
a) Si calcolino il valore atteso e la varianza del peso medio dei 200 pacchi.
b) Si calcoli la probabilità che il peso medio dei 200 pacchi sia maggiore di 1340.

<u>ESERCIZIO 5</u> Due variabili aleatorie X e Y hanno distribuzione congiunta data dalla seguente tabella a doppia entrata:

X \ Y	-2	0	2
-1	0.08	0.24	0.08
0	0.06	0.18	0.06
1	0.04	0.12	0.04
2	0.02	0.06	0.02

a) Si calcoli il coefficiente di correlazione lineare di X e Y.
b) Si calcoli la probabilità che X sia minore di 1 e Y maggiore o uguale a 0.
c) Si determini la funzione di probabilità di Y^2.
d) Si determini la varianza di Y^2.

<u>ESERCIZIO 6</u> Il peso associato ad un passeggero che prende un aereo (tale peso include il peso del passeggero e quello dei suoi bagagli) ha distribuzione normale con media 100 e scarto quadratico medio 15.
a) Si calcoli la probabilità che tale peso associato al passeggero si minore di 110.
b) Si considerano 10 passeggeri. Si calcoli la probabilità che il peso totale associato ai 10 passeggeri sia minore di 1100.
c) Si considerano 100 passeggeri. Si calcoli la probabilità che il peso totale associato ai 100 passeggeri sia minore di 11000.
d) Se non si ipotizzasse la distribuzione normale per il peso, cambierebbero le risposte ai punti b) e c)?

<u>ESERCIZIO 7</u> Due variabili X e Y hanno distribuzione di Poisson di media 2 e 3 rispettivamente. Il loro coefficiente di correlazione lineare è pari a -0.8.
a) Si calcoli la probabilità che X sia uguale a 5.
b) Si dica se X e Y sono indipendenti. Nel caso non lo siano, si descriva il tipo e livello di associazione tra esse.
c) Si calcoli la covarianza tra X e Y.
d) Si calcoli la varianza di T=X-3Y.

TRACCIA SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

a) X = numero accessi in un quarto d'ora

$X \sim Poisson(6)$

$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.2851 = 0.7149$

b) Y = numero accessi in 5 minuti

$Y \sim Poisson(2)$

$P(Y \leq 3) = 0.8571$

c) T = costo totale in un quarto d'ora, $T = 50X$

$E(T) = E(50 \cdot X) = 50 \cdot E(X) = 50 \cdot 6 = 300$

$Var(T) = Var(50 \cdot X) = 2500 \cdot Var(X) = 2500 \cdot 6 = 15000$

ESERCIZIO 2

X = numero prodotti restituiti, tra i 7

$X \sim Bin(7, 0.33)$

a) $P(X=1) = \frac{7!}{1! \cdot 6!}(0.33)^1(0.67)^6 = 0.2089$

b) $P(X<5) = 1 - P(X=5) - P(X=6) - P(X=7) =$

$= 1 - 0.0369 - 0.0061 - 0.0004 =$

$= 0.9566$

c) T = danno totale ; $T = 20X$

$E(T) = 20 \cdot E(X) = 20 \cdot (7 \cdot 0.33) = 46.2$

$Var(T) = 400 \cdot Var(X) = 400 (7 \cdot 0.33 \cdot 0.67) = 619.08$

ESERCIZIO 3

Rendimento del portafoglio $= T = 0.3X + 0.2Y + 0.5U$,
dove X, Y, U sono i rendimenti di A, B e C.

$X \sim N(0.03, 0.02^2)$, $E(Y) = 0.07$, $\sigma(Y) = 0.01$

$E(U) = 0.08$, $\sigma(U) = 0.04$.

$\rho(X,Y) = 0$, $\rho(X,U) = 0.3$, $\mathrm{cov}(Y,U) = 0.0002$

a) $P(X > 0.05) = P\left(Z > \frac{0.05 - 0.03}{0.02}\right) = P(Z > 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$

b) $P(X \leq q_{0.72}) = P\left(Z \leq \frac{q_{0.72} - 0.03}{0.02}\right) =$ [illegible] 0.72

Quindi $\frac{q_{0.72} - 0.03}{0.02} = 0.58$, ovvero $q_{0.72} = 0.0416$

c) $E(T) = (0.3)E(X) + (0.2)E(Y) + (0.5)E(U) =$

$= (0.3)(0.03) + (0.2)(0.07) + (0.5)(0.08) = 0.053$

d) $Var(T) = (0.3)^2 Var(X) + (0.2)^2 Var(Y) + (0.5)^2 Var(U) +$

$+ 2 \cdot 0.3 \cdot 0.2 \cdot \mathrm{cov}(X,Y) + 2 \cdot (0.3) \cdot (0.5) \mathrm{cov}(X,U) + 2 \cdot (0.2) \cdot (0.5) \mathrm{cov}(Y,U) =$

$= (0.09) \cdot (0.02^2) + (0.04) \cdot (0.01)^2 + (0.25)(0.04)^2 +$

$+ 2 \cdot (0.3)(0.5)\left[(0.3) \cdot (0.02) \cdot (0.04)\right] + 2 \cdot (0.2)(0.5)(0.0002) =$

$= 0.000036 + 0.000004 + 0.0004 +$

$+ 0.000072 + 0.0004 = 0.000912$

$\sigma(T) = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{0.000912} = 0.0302$

e) Non è detto che siano indipendenti, ma possono esserlo.

ESERCIZIO 4

$X_1, \ldots, X_{200}$ pesi dei pacchi

$X_1, \ldots, X_{200}$ iid con $E(X_i) = 1300$

e $\sigma(X_i) = 430$

a) $E(\bar{X}) = 1300$

$Var(\bar{X}) = 430^2 / 200 = 924.5$

b) $\bar{X} \approx N(1300, 924.5)$ per il teorema centrale del limite

$$P(\bar{X} > 1340) = P\left(Z > \frac{1340 - 1300}{\sqrt{924.5}}\right) =$$

$$= P(Z > 1.32) = 1 - 0.9066 = 0.0934$$

ESERCIZIO 5

a) Poiché $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$ per ogni x e y, si ha che X e Y sono indipendenti, per cui $\rho(X, Y) = 0$.

b) $P(X < 1, Y \geq 0) = 0.56$

c) $S_{Y^2} = \{0, 4\}$

$$p_{Y^2}(t) = \begin{cases} 0.6 & t = 0 \\ 0.4 & t = 4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

d) $Var(Y^2) = 0^2 \cdot (0.6) + 4^2 (0.4) - [0 \cdot 0.6 + 4 \cdot 0.4]^2 =$

$= 6.4 - 2.56 = 3.84$

ESERCIZIO 6

$X = \text{peso}$, $X \sim N(100, 15^2)$

a) $P(X < 110) = P\left(Z < \frac{110-100}{15}\right) = P(Z < 0.67) =$
$= 0.7486$

b) $X_1, \dots, X_{10}$ iid $\sim N(100, 15^2)$; $T = \sum_{i=1}^{10} X_i$, $T \sim N(1000, 2250)$
$P(T < 1100) = P\left(Z < \frac{1100-1000}{\sqrt{2250}}\right) = P(Z < 2.11) = 0.9826$

c) $X_1, \dots, X_{100}$ iid $\sim N(100, 225)$; $U = \sum_{i=1}^{100} X_i$, $U \sim N(10000, 22500)$
$P(U < 11000) = P\left(Z < \frac{11000-10000}{22500}\right) = P(Z < 6.67) = 0$

d) La probabilità in b) non potrebbe essere calcolata, quella in c) sarebbe la stessa (per il T.C.L.).

ESERCIZIO 7

$X \sim \text{Poisson}(2)$, $Y \sim \text{Poisson}(3)$, $\rho(X,Y) = -0.8$

a) $P(X = 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4) = 0.0361$

b) Non sono indipendenti (se lo fossero, $\rho(X,Y)$ sarebbe 0).
Hanno un'associazione lineare negativa di intensità elevata.

c) $\text{cov}(X,Y) = \rho(X,Y) \cdot \sigma(X) \cdot \sigma(Y) = (-0.8) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = -1.9596$

d) $\text{Var}(T) = \text{Var}(X - 3Y) = \text{Var}(X) + 9 \cdot \text{Var}(Y) - 6\,\text{cov}(X,Y) =$
$= 2 + 9 \cdot 3 - 6 \cdot (-1.9596) =$
$= 2 + 27 + 11.7576 = 40.7576$