
ESERCIZIO 1

I prezzi (in migliaia di euro) degli appartamenti trilocali di una città hanno valore medio pari a 500 e scarto quadratico medio pari a 120; sono inoltre ben descritti da una distribuzione normale. Si estrae un campione di 80 appartamenti.

- Si calcoli la probabilità che il primo degli appartamenti estratti per formare il campione abbia prezzo minore di 480.
- Si calcoli la probabilità che il secondo degli appartamenti estratti per formare il campione abbia prezzo compreso tra 480 e 520.
- Si calcoli la probabilità che il prezzo medio degli 80 appartamenti che formano il campione sia minore di 480.
- Si calcoli la probabilità che il prezzo medio degli 80 appartamenti che formano il campione sia compreso tra 480 e 520.
- Se non si ponesse l'ipotesi di normalità dei prezzi, cosa si potrebbe dire delle probabilità richieste in a), b), c) e d)?
- Sotto l'ipotesi di normalità dei prezzi, si calcolino il III quartile del prezzo del singolo appartamento ed il III quartile del prezzo medio degli 80 appartamenti del campione. A cosa è legata la differenza tra questi due valori?

Soluzione

X = prezzo degli appartamenti trilocali di una città

$$X \sim N(500, 120^2)$$

Campione: X_1, X_2, \dots, X_{80} $n = 80$ iid $N(500, 120^2)$

- $P(X_1 < 480) = P(Z < \frac{480-500}{120}) = P(Z < -0,167) = 1 - 0,566 = 0,434$
- $P(480 < X_2 < 520) = P(\frac{480-500}{120} < Z < \frac{520-500}{120}) = P(-0,167 < Z < 0,167) = 0,132$
- $\bar{X} = \frac{1}{80} \sum_{i=1}^{80} X_i \sim N(500, \frac{120^2}{80} = 180)$; quindi $P(\bar{X} < 480) = P(Z < \frac{480-500}{\sqrt{180}}) = P(Z < -1,49) = 0,068$
- $P(480 < \bar{X} < 520) = P(\frac{480-500}{\sqrt{180}} < Z < \frac{520-500}{\sqrt{180}}) = P(-1,49 < Z < 1,49) = 0,864$
- Le probabilità in a) e b) potrebbero essere molto diverse, quelle in c) e d) sarebbero approssimativamente le stesse, in base al teorema centrale del limite.
- Per il terzo quartile del prezzo del singolo appartamento, cerchiamo $k \in R$ tale che $P(X_1 < k) = 0,75$, ovvero $P(\frac{X_1-500}{120} < \frac{k-500}{120}) = 0,75$, ovvero $P(Z < \frac{k-500}{120}) = 0,75$, cioè $(k - 500)/120 = 0.67$, per cui $k = 580.4$
Analogamente, il terzo quartile di \bar{X} è $500 + \sqrt{180} \cdot 0.67 = 508.99$. La differenza è dovuta alle varianze diverse di \bar{X} e X_1 (molto maggiore quella di X_1).

ESERCIZIO 2

Ad un campione di 300 persone che hanno visto un determinato film viene chiesto di dichiarare se il

film è piaciuto oppure no.

- a) Se la probabilità che ad un generico spettatore il film sia piaciuto è pari a 0.4, qual è la probabilità che la percentuale di persone nel campione cui è piaciuto il film sia maggiore del 45%?
- b) Se la probabilità che ad un generico spettatore il film sia piaciuto è pari a 0.4, qual è la probabilità che il film sia piaciuto a meno di 100 persone (sulle 300 intervistate)?

Soluzione

$X = 1$ il film è piaciuto

$X = 0$ il film non è piaciuto

$X \sim \text{Bern}(p)$, X_1, X_2, \dots, X_{300} campione da $\text{Bern}(p)$

- a) Se $p = 0,4$

$$P(\hat{P} > 0,45) = P\left(\frac{\hat{P}-0,4}{\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{300}}} > \frac{0,45-0,4}{\sqrt{\frac{0,4 \cdot 0,6}{300}}}\right) = P(Z > 1,768) = 1 - 0,962 = 0,038.$$

- b) Se $p = 0,4$, $P(T < 100) = P(Z < \frac{100-120}{\sqrt{72}}) = P(Z < -2,36) = 0,009$, dove $T = X_1 + \dots + X_{300} \approx N(120, 72)$.

ESERCIZIO 3

Per descrivere il prezzo di vendita di un certo articolo nei negozi di una regione si utilizza, come modello, una distribuzione gaussiana, con varianza pari a 40 (euro^2). Si è interessati a stimare il prezzo medio di vendita, non noto. A questo scopo, si considera un campione di 10 negozi della regione.

- a) Se il prezzo medio dell'articolo nell'intera regione fosse pari a 40 euro, quale sarebbe la probabilità che la media dei prezzi rilevati nei 10 negozi del campione sia minore di 38 euro?
- b) Se il prezzo medio nell'intera regione fosse invece 50 euro, quale sarebbe la probabilità richiesta al punto precedente?
- c) Nei 10 negozi che costituiscono il campione, si rilevano i seguenti prezzi: 37,38,42,32,38,40,40,36,36,31. Alla luce di questi dati, è realistica l'ipotesi che il prezzo medio di vendita nell'intera regione sia 50 euro?

Soluzione

$X =$ prezzo articolo, $X \sim N(\mu, 40)$

X_1, X_2, \dots, X_{10} campione da $N(\mu, 40)$; $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{40}{10} = 4)$.

- a) Se $\mu = 40$, $P(\bar{X} \leq 38) = P(Z \leq \frac{38-40}{2}) = P(Z \leq -1) = 0,159$

- b) Se $\mu = 50$

$$P(\bar{X} \leq 38) = P(Z \leq \frac{38-50}{2}) = P(Z \leq -6) \simeq 0$$

- c) Dai dati si ricava $\bar{x} = 37$. L'ipotesi $\mu = 50$ è molto poco plausibile, perchè sotto di essa la probabilità di osservare $\bar{X} \leq 38$ è praticamente nulla (ed è stato invece osservato il valore 37).

ESERCIZIO 4

Le uova prodotte in un allevamento hanno peso con varianza pari a 2. Il produttore dichiara che, in media, le uova prodotte nel proprio allevamento hanno peso medio pari a 72 grammi. Per verificare tale dichiarazione, si estrae un campione di 300 uova, il peso medio delle quali è 69.

- a) Si calcoli la probabilità che il peso medio delle 300 uova del campione sia minore di 70 grammi, supponendo vera l'affermazione del produttore sul peso medio.
- b) E' da respingere l'affermazione del produttore, alla luce dei dati rilevati sul campione di 300 uova?

Soluzione

X =peso uova

$$E(X) = \mu, \text{Var}(X)=2$$

Ipotesi dichiarata: $\mu = 72$

X_1, \dots, X_{300} campione; $\bar{X} \sim N(72, 2/300 = 0.0067)$ se l'ipotesi è vera. La realizzazione campionaria fornisce $\bar{x} = 69$.

- a) Se $\mu = 72$, $P(\bar{X} < 70) = P(Z < \frac{70-72}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{300}}}) = P(Z < -24,49) \simeq 0$
- b) L'affermazione è estremamente implausibile, perchè sotto l'ipotesi $\mu = 72$ la probabilità di $\bar{X} < 70$ è praticamente nulla (e si è osservato $\bar{x} = 69$)

ESERCIZIO 5

Su un campione di 8 studenti, si rileva il tempo (in minuti) dedicato quotidianamente all'ascolto della musica; si utilizzi la distribuzione gaussiana, con varianza pari a 400, come modello per descrivere il tempo di ascolto giornaliero di musica. Il tempo medio di ascolto giornaliero μ , nell'intera popolazione di studenti, è invece incognito.

- a) Si calcoli la probabilità che il tempo medio di ascolto degli 8 studenti che costituiscono il campione differisca da μ per meno di 30 minuti.
- b) Se la rilevazione campionaria fornisce i valori 40,60,120,80,90,90,240,180, è plausibile un valore di μ pari a 150 minuti? Si giustifichi la risposta.

Soluzione

X = tempo ascolto, X_1, \dots, X_8 campione da $N(\mu, 400)$. Quindi:
 $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{400}{8} = 50)$

a) $P(|\bar{X} - \mu| < 30) = P(\mu - 30 < \bar{X} < \mu + 30) = P(-4.24 < Z < 4.24) \simeq 1$.

b) Dai dati si ottiene la realizzazione $\bar{x} = 112,5$. Sulla base di a), \bar{X} differisce da μ con probabilità praticamente uguale a 1 per meno di 30; poichè $\mu = 150$ differisce da 112,5 per più di 30, l'ipotesi $\mu = 150$ non è plausibile.