Esercizi Intervalli di Confidenza I

ESERCIZIO 1

X =numero di passeggeri giornaliero

$X_1, X_2, ..., X_7$ campione estratto da X

$47, 66, 55, 53, 49, 65, 50$ realizzazioni del campione

a. Stima puntuale
$$\overline{x} = \frac{47 + 66 + ... + 50}{7} = 55$$

b. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con μ, σ incogniti.
L'intervallo al 99% è
$$(\overline{x} - t^{n-1}_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + t^{n-1}_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}})$$

dove

$\overline{x} = 55$ $\qquad$ $n = 7$ $\qquad$ $t^{n-1}_{\alpha/2} = t^{6}_{0,005} = 3,71$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(47-55)^2 + ... + (50-55)^2}{6}} = 7,64$$

Quindi l'intervallo è

$$(55 - 3,71\frac{7,64}{\sqrt{7}}; 55 + 3,71\frac{7,64}{\sqrt{7}}) = (55 - 10,71; 55 + 10,71) = (44,29; 65,71)$$

ESERCIZIO 2

X = tempo esecuzione test,

$X_1, ..., X_{60}$ campione ($n = 60$ è sufficientemente grande, quindi $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$)

L'intervallo è

$$(\overline{x} \mp z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}) = (12 - 1,96\sqrt{\frac{15}{60}}; 12 + 1,96\sqrt{\frac{15}{60}}) = (12 - 0,98; 12 + 0,98) = (11,02; 12,98)$$

ESERCIZIO 3

X = durata telef. nella fascia considerata

$X_1, ..., X_{1200}$ (n quindi grande, quindi $\overline{X}$ si può approssimare alla normale)

Realizzazone campionaria: $x = 4,7$, $s^2 = 4,5$

Intervallo al 90%:

$(4,7 - 1,645\sqrt{\frac{4,5}{1200}}; 4,7 + 1,645\sqrt{\frac{4,5}{1200}}) = (4,7 - 0,1; 4,7 + 0,1) = (4,6; 4,8)$

Intervallo al 95%:

$(4,7 - 1,96\sqrt{\frac{4,5}{1200}}; 4,7 + 1,96\sqrt{\frac{4,5}{1200}}) = (4,7 - 0,12; 4,7 + 0,12) = (4,58; 4,82)$

Intervallo al 99%:

$(4,7 - 1,96\sqrt{\frac{4,5}{1200}}; 4,7 + 2,575\sqrt{\frac{4,5}{1200}}) = (4,54; 4,86)$

ESERCIZIO 4

X = spesa mensile

$X_1, ..., X_{20}$ campione

$\overline{x} = 820$, $s = 156$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Intervallo al 95%:

$\overline{x} - t_{\alpha/2}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}; \overline{x} + t_{\alpha/2}^{n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} = (820 - 2,09\frac{156}{\sqrt{20}}, 820 + 2,09\frac{156}{\sqrt{20}}) = (820 - 72,9; 820 + 72,9) = (747,1; 892,9)$

ESERCIZIO 5

X = durata pneumatici;

$X_1, ..., X_{15}$ campione

$\overline{x} = 37500$ $X \sim (\mu, 4000^2)$

a. $(x - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; x + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (37500 - 1,96\frac{4000}{\sqrt{15}}) = (37500 - 2024,28; 37500 + 2024,28) = (35475,72; 39524,28)$

b. La lunghezza dell'intervallo precedente è $L = 4048,56$. Quindi la lunghezza desiderata è $\frac{L}{2} = 2024,28$. Poichè la lunghezza di un intervallo al 95% per la media di una popolazione normale con varianza nota è per un campione di ampiezza n $w = \frac{2z_{\alpha/2\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{15680}{\sqrt{n}}$

   Quindi n deve soddisfare la disequazione

   $\frac{15680}{\sqrt{n}} \leq 2024,28$

   cioè $n \geq 59,99$ $n \geq 60$

Bisogna dunque campionare almeno 60 pneumatici.

ESERCIZIO 6

$X = 1$ vota
$X = 0$ non vota
$X \sim Bern(\theta)$

$\theta =$ proporzione di elettori, sul totale, che votano.

$X_1, ..., X_{800}$ campione da X

$\widehat{p} = \frac{\sum x_i}{800} = \frac{352}{800} = 0,44$ prop. campionaria

Intervallo di confidenza per θ, al 99%

$$(0,44 \mp 2,576\sqrt{\frac{0,44 \cdot 0,56}{800}}) = (0,44 - 0,045; 0,44 + 0,045) = (0,395; 0,485)$$

Quindi, con "fiducia" pari al 99% (quindi molto alta) la "vera" percentuale di coloro che voteranno è compresa tra il $39,5\%$ ed il $48,5\%$, per cui al di sotto del 50%. Quindi l'affermazione è ragionevole, anche se ovviamente, non è affatto certo che il referendum non raggiunga il quorum.
Se $\widehat{p} = \frac{395}{800} = 0,49375$, allora un qualunque intervallo di livello standard $(0,90; 0,95; 0,99)$ contiene $0,5$; ad esempio, il più corto (al 90%) è $(0,465; 0,523)$, quindi l'affermazione non sarebbe ragionevole.

ESERCIZIO 7

$X \sim Bern(\theta)$, $\theta =$ prop. giovani che vanno a teatro almeno una volta

$X_1, ..., X_{200}$ campione

$\widehat{p} = \frac{18}{200} = 0,09$

Intervallo al 90%

$(x \mp z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}) = (0,09 \mp 1,645\sqrt{\frac{0,09 \cdot 0,091}{200}}) = (0,057; 0,123)$

ESERCIZIO 8

$X \sim Bern(\theta)$ $\theta =$ prop. studenti che ripetono la scela

$X_1, ..., X_{90}$ campione (numero sufficientemente grande per appross. normale)

$\widehat{p} = \frac{52}{90} = 0,578$

Poichè l'intervallo per θ al 90% è $(0,492; 0,664)$ e, quindi, contiene $0,5$ (e a maggior ragione cotengono $0,5$ gli intervalli al 90% e 95%), è ragionevole ipotizzare che la metà del totale degli iscritti ripeterebbe la scelta.

ESERCIZIO 9

X = spesa pasto $X \sim N(\mu, 0,8^2)$

$X_1, ..., X_{20}$ campione

a. $\overline{x} = 5,3$ intervallo al 90%

$$(\overline{x} \mp z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (53 \mp 1,645 \frac{0,8}{\sqrt{20}}) = (5,01; 5,59)$$

b. Sì, possono esserci intervalli che non contengono μ, in percentuale sono il 10%, cioè circo 80000, in quanto l'intervallo è al 90% e, quindi, la probabilità di estrarre un campione per il quale l'intervallo corrispondente non contiene μ è $0,1$.

ESERCIZIO 10

$X \sim Bern(\theta)$, θ = prop. CD difettosi

a. $\widehat{p} = \frac{12}{300} = 0,04$

b. No, non si può basare una decisione riguardante il parametro incognito θ basandosi esclusivamente sulla stima puntuale, che dipende dl campione osservato.

c. L'intervallo è $(0,012; 0,068)$