SOLUZIONE ESERCIZIO 8.3

a) Il consumatore indifferente (marginale) si localizzerà nel punto $\hat{x}$ tale per cui il costo totale (prezzo più costo di trasporto) di affitto dall'impresa A è uguale al costo totale di affitto dall'impresa B, ossia:

$$P_A + \tau\hat{x} = P_B + \delta(1-\hat{x})$$
$$(\tau+\delta)\hat{x} = P_B - P_A + \delta$$
$$\hat{x} = \frac{P_B - P_A + \delta}{\tau+\delta}$$

b) Essendo il numero dei consumatori N=100, la funzione di domanda per le due imprese sarà data da:

$$Q_A = D^A(P_A, P_B) = N \cdot \hat{x}(P_A, P_B) = 100\frac{(P_B - P_A + \delta)}{\tau+\delta}$$

e da:

$$Q_B = D^B(P_A, P_B) = N \cdot [1-\hat{x}(P_A, P_B)] = 100\left[1-\frac{(P_B - P_A + \delta)}{\tau+\delta}\right] = 100\frac{(P_A - P_B + \tau)}{\tau+\delta}$$

rispettivamente.

c) Per determinare la funzione di risposta ottima dell'impresa A occorre risolvere il seguente problema di massimizzazione dei profitti rispetto alla variabile P_A:

$$\max_{P_A} : \pi_A(P_A, P_B) = (P_A - C_A)Q_A = (P_A - 2)100\frac{(P_B - P_A + \delta)}{\tau+\delta}$$

La condizione del primo ordine risulta essere:

$$100\frac{P_B}{\tau+\delta} - 200\frac{P_A}{\tau+\delta} + 100\frac{\delta}{\tau+\delta} + 200\frac{1}{\tau+\delta} = 0$$

da cui:

$$P_A^* = \frac{1}{2}(P_B + \delta) + 1$$

Similmente si trova la funzione di risposta ottima di B:

$$P_B^* = \frac{1}{2}(P_A + \tau) + 4$$

d) In equilibrio le due imprese sceglieranno il prezzo in base alla propria funzione di risposta ottima. Occorre quindi risolvere il sistema tra le due funzioni di risposta ottima:

$$\begin{cases} P_A^* = \frac{1}{2}(P_B + \delta) + 1 \\ P_B^* = \frac{1}{2}(P_A + \tau) + 4 \end{cases}$$

da cui:

$$P_A^* = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P_A^* + \frac{1}{2}\tau + 4 + \delta\right) + 1$$

ossia:

$$P_A^* = \frac{1}{3}\tau + \frac{2}{3}\delta + 4$$

E quindi, sostituendo, per l'impresa B:

$$P_B^* = \frac{2}{3}\tau + \frac{1}{3}\delta + 6$$

e) Calcoliamo le quote di mercato delle due imprese in funzione dei parametri:
Share A

$$Sh_A = \frac{Q_A}{Q_A + Q_B} = \frac{100\dfrac{\left(P_B^* - P_A^* + \delta\right)}{\tau + \delta}}{100} = \frac{\dfrac{2}{3}\tau + \dfrac{1}{3}\delta + 6 - \dfrac{1}{3}\tau - \dfrac{2}{3}\delta - 4 + \delta}{\tau + \delta} = \frac{\dfrac{1}{3}\tau + \dfrac{2}{3}\delta + 2}{\tau + \delta}$$

Share B

$$Sh_B = \frac{Q_B}{Q_A + Q_B} = \frac{100\dfrac{\left(P_A^* - P_B^* + \tau\right)}{\tau + \delta}}{100} = \frac{\dfrac{1}{3}\tau + \dfrac{2}{3}\delta + 4 - \dfrac{2}{3}\tau - \dfrac{1}{3}\delta - 6 + \tau}{\tau + \delta} = \frac{\dfrac{2}{3}\tau + \dfrac{1}{3}\delta - 2}{\tau + \delta}$$

Quindi la condizione richiesta è che valga:
Sh_A=2Sh_B
Ossia:

$$\frac{\dfrac{1}{3}\tau + \dfrac{2}{3}\delta + 2}{\tau + \delta} = 2 \cdot \frac{\dfrac{2}{3}\tau + \dfrac{1}{3}\delta - 2}{\tau + \delta}$$

$$\frac{1}{3}\tau + \frac{2}{3}\delta + 2 - \frac{4}{3}\tau - \frac{2}{3}\delta + 4 = 0$$

da cui:

$$\tau = 6 \;\; e \;\; \forall \delta \;\; con \;\; 0 < \delta < \tau$$

f) In entrambi i modelli le imprese scelgono simultaneamente il livello del prezzo, ma in Hotelling le imprese sono in grado di produrre beni differenziati, ossia di scegliere anche la localizzazione del proprio prodotto.
Il risultato del paradosso di Bertrand mostra che anche due sole imprese che competono sui prezzi e producono un bene omogeneo portano all'equilibrio perfettamente concorrenziale, in cui le imprese non detengono nessun potere di mercato, i prezzi sono uguali al costo marginale e le imprese realizzano profitti nulli.
Introducendo l'ipotesi più realistica di prodotti differenziati si ha che le imprese in equilibrio avranno una curva di domanda inclinata negativamente (ossia hanno potere di mercato), fissano prezzi maggiori dei costi marginali e realizzano profitti positivi.